Endliche Summen ganzer Zahlen

Ingolf Giese

Oktober 2022

A. Summe der N ersten Zahlen

Man schreibt die N ersten (positiven ganzen) Zahlen in zwei Spalten auf, die 1. Hälfte in der 1. Spalte in aufsteigender Reihenfolge und die 2. Hälfte in der zweiten Spalte jedoch in absteigender (also umgekehrter) Reihenfolge.
Das sieht dann z.B. für $N = 8$ folgendermaßen aus:

1. Hälfte	2. Hälfte
1	8
2	7
3	6
4	5

Dabei fällt auf, dass im Fall $N = 8$ die Zeilensummen immer 9 sind $\big[$ allgemein $N+1\big]$.

Da es hier 4 $\big[$ allgemein $N/2\big]$ Zeilen sind, findet man somit als allgemeine Summenformel der N ersten Zahlen – bei geradem N:

$$S_{N\,gerade} = N/2 \cdot (N + 1)$$

Diese Vorgehensweise ist aber für ungerades N nicht direkt anwendbar. Jedoch kann man mit einer (die Summe nicht verändernden) zusätzlichen 0 in gleicher Weise arbeiten, wobei die 0 an vorderster Stelle der ganzen Zahlen steht.
Das sieht dann z.B. für $N = 7$ so aus:

1. Hälfte inkl. 0	2. Hälfte
0	7
1	6
2	5
3	4

Hier sind im Fall $N = 7$ die Zeilensummen immer 7 $\big[$ allgemein $N\big]$; und es sind 4 $\big[$ allgemein $(N + 1)/2\big]$ Zeilen. Damit findet man als allgemeine Summenformel der N ersten Zahlen – bei ungeradem N:

$$S_{N\,ungerade} = (N + 1)/2 \cdot N$$

Um in einer Formel eine Summe mit vielen Summanden einfacher darstellen zu können, benutzt man das große Sigma-Zeichen $\sum$ und einen Ausdruck, der die Summenglieder mittels eines Variablennamens beschreibt – i.A. ein Kleinbuchstabe zwischen i und n, hier k.

Im Fall der Summe der N ersten Zahlen ist das der einfache Ausdruck k, wobei hier die Variable k alle Werte von 1 bis N durchlaufen soll. Der Anfangswert (1) bzw. Endwert (N) wird mit dem Variablennamen k im Sigma-Zeichen unterhalb bzw. oberhalb (aber ohne k) angegeben.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + N = \sum_{k=1}^{N} k$$

Da die Summen $S_{N\,gerade}$ und $S_{N\,ungerade}$ die gleiche Formel haben – nur etwas umgeformt, folgt somit für die Summe der N ersten Zahlen in einer etwas anderen Darstellung:

$$(1)\quad S_N = \sum_{k=1}^{N} k = \frac{N \cdot (N+1)}{2}$$

Die Summen sind für die ersten Zahlen: $1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55$ ("Dreieckszahlen").

Formel (1) ist die sogenannte "Gaußsche Summenformel", benannt nach Carl Friedrich Gauß, der diese vor fast 250 Jahren im Alter von 9 Jahren (!) aufstellte. Sein Lehrer hatte in der 3. Volksschulklasse den Schülern die Aufgabe gestellt, die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren ("Stillbeschäftigung").
Während alle anderen Schüler sich an die Arbeit machten, fand Gauß, dass das abgekürzt geschrieben und somit leicht berechnet werden kann zu $(1+100)+(2+99)\cdots+(50+51)$, also $50 \cdot 101 = 5050$.
Genau das ist der Unterschied zwischen "Rechnen" und "Mathematik" !

Eine direkte Veranschaulichung geht auch mittels einer Darstellung mit einzelnen Punkten (p Punkte für die Darstellung der Zahl p) – hier wieder für gerades $N = 8$ und mit dem Zeichen o für die Zahlen bis 4, und $\bullet$ für die Zahlen größer 4:

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & & & & & & & & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 & & & & & & & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 & & & & & & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 & & & & & \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 & & & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \text{Drehung } \circlearrowright & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 & & & \mathrm{o} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet & \mathrm{o} \\
 & & \mathrm{o} & \mathrm{o} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \mathrm{o} & \mathrm{o} \\
 & \mathrm{o} & \mathrm{o} & \mathrm{o} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \mathrm{o} & \mathrm{o} & \mathrm{o} \\
\mathrm{o} & \mathrm{o} & \mathrm{o} & \mathrm{o} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \mathrm{o} & \mathrm{o} & \mathrm{o} & \mathrm{o}
\end{array}$$

Die rechte Hälfte des Dreiecks (alle Punkte $\bullet$) wird um 180 Grad gedreht und auf die linke Hälfte (Punkte o) gesetzt. Man sieht dann 4 $\left[\text{allgemein } N/2\right]$ Spalten mit jeweils 9 $\left[\text{allgemein } N+1\right]$ Punkten, also wieder Formel (1).

Ein ähnliches Bild kann für ungerades N gezeichnet werden, wobei dann die letzte Spalte des Dreiecks (mit nur $\bullet$-Zeichen) vor die erste gesetzt wird.

Man kann die Summenformel auch über Mittelwerte herleiten, z. B. bei ungeradem $N = 7$ mit Mittelwert $(1 + 7)/2 = 4$, wie im Folgendem dargestellt wird:

$$
\begin{aligned}
1 &= 4 - 3\\
2 &= 4 - 2\\
3 &= 4 - 1\\
4 &= 4\\
5 &= 4 + 1\\
6 &= 4 + 2\\
7 &= 4 + 3
\end{aligned}
$$

Alle Abzüge oder Zuschläge zu dem Mittelwert (mittlerer Wert) 4 $\left[\text{allgemein } (1+N)/2\right]$ - möglich wegen Zahlenfolge mit gleichen Abständen - heben sich gegenseitig auf, und es sind dann 7 $\left[\text{allgemein } N\right]$ Zeilen mit dem Mittelwert 4, und damit wieder Formel (1).

Das geht auch bei geradem N, aber mit einer unschönen Nachkommastelle bei dem Mittelwert und den Abzügen und Zuschlägen. Einfacher ist es, wieder die Zahl 0 an vorderster Stelle der ganzen Zahlen einzusetzen $(0 = N/2 - N/2)$.

Aber die einfachste Herleitung der Gaußschen Summenformel erhält man, wenn alle N Zahlen in der ersten Spalte in aufsteigender Reihenfolge und in der 2. Spalte noch einmal in absteigender Reihenfolge geschrieben werden, im Beispiel wieder mit $N = 7$:

1. Gruppe	2. Gruppe
1	7
2	6
3	5
4	4
5	3
6	2
7	1

Dabei spielt es keine Rolle, ob N gerade oder ungerade ist !

Die Summe aller dieser Zahlen, also 7 $\left[\text{allgemein } N\right]$ Zeilen mit jeweils $7 + 1 = 8$ $\left[\text{allgemein } N+1\right]$ als Zeilensummen, ist nun $7 \cdot 8$ $\left[\text{allgemein } N \cdot (N+1)\right]$. Das ist genau das Doppelte der gesuchten Summe S_N, und damit folgt wieder Formel (1).

Nachfolgend soll Formel (1) durch vollständige Induktion bewiesen werden.

Bei einem Induktionsbeweis ist es wichtig, dass es eine (vermutete) Formel gibt, die dann durch die Induktion bewiesen werden kann.

Induktionsanfang: Zuerst muss für eine Zahl N die Formel bewiesen werden, der Einfachheit halber hier mit $N = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$$

Induktionsvoraussetzung: Es sei Formel (1) bewiesen bis zur Zahl N:

$$\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N \cdot (N+1)}{2}$$

Induktionsbehauptung: Dann gilt diese Formel auch für $N+1$:

$$\sum_{k=1}^{N+1} k = \frac{(N+1) \cdot (N+2)}{2}$$

Induktionsbeweis (Induktionsschritt):

$$\sum_{k=1}^{N+1} k = \sum_{k=1}^{N} k + (N+1) = \frac{N \cdot (N+1)}{2} + (N+1) = (N+1) \cdot (N/2+1)$$
$$= (N+1) \cdot \frac{N+2}{2} = \frac{(N+1) \cdot (N+2)}{2}$$

Induktionsschluss: Weil aus der Formel bis N folgt, dass diese auch für $N+1$ richtig ist, gilt sie für alle Zahlen N (ab dem N aus dem Induktionsanfang, hier also ab $N=1$).

Tipp: Falls man sich bei den längeren Umformungen unsicher ist, ob man eventuell einen Fehler gemacht hat, kann man durch Einsetzen eines (kleinen) Wertes von N, hier z.B. $N=2$, eine Probe in jeder Umformungszeile machen.

B. Summe der N ersten geraden Zahlen

Die Summe der N ersten geraden Zahlen folgt aus Formel (1) durch Ausklammern von 2:

$$\sum_{k=1}^{N} 2k = 2+4+\cdots+2N = 2 \cdot (1+2+\cdots+N) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{N} k = 2 \cdot \frac{N \cdot (N+1)}{2}$$

(2) $$\sum_{k=1}^{N} 2k = N \cdot (N+1)$$

C. Summe der N ersten ungeraden Zahlen

Schreibt man die N ersten ungeraden Zahlen in einer Spalte auf und in einer zweiten Spalte die jeweiligen Summen, erhält man zum Beispiel für $N=5$:

Ungerade Zahl	Summe
1	1
3	4
5	9
7	16
9	25

Dabei fällt auf, dass alle Summen Quadratzahlen sind.

Dieses Prinzip erkennt man auch an der folgenden Veranschaulichung, wobei wieder in der Darstellung einzelne Punkte gezeichnet werden (p Punkte für die Darstellung der Zahl p). Dabei sollen die Zeichen o die Punkte der bisherigen Zahl und • die Punkte der neuen Zahl sein.

$$\begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ \mathrm{o} & \bullet \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \mathrm{o} & \mathrm{o} & \bullet \\ \mathrm{o} & \mathrm{o} & \bullet \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \mathrm{o} & \mathrm{o} & \mathrm{o} & \bullet \\ \mathrm{o} & \mathrm{o} & \mathrm{o} & \bullet \\ \mathrm{o} & \mathrm{o} & \mathrm{o} & \bullet \end{array}$$

Man sieht, dass zu jedem bisherigen Quadrat der Breite und Höhe N insgesamt $2N + 1$ Punkte dazu kommen, und zwar als neue rechte Spalte N Punkte, als neue obere Zeile wieder N Punkte, und ein weiterer Punkt in der neu entstandenen Ecke rechts oben. Dadurch entsteht wieder ein Quadrat.

Eine andere Herleitung ergibt sich aus der Betrachtung der N ersten ungeraden und N ersten geraden Zahlen, also der $2N$ ersten Zahlen:

$$(1 + 3 + \cdots + 2N - 1) + (2 + 4 + \cdots + 2N) = (1 + 2 + 3 + \cdots + 2N)$$

Aus den beiden Formeln (1) [mit $2N$ statt N] und (2) folgt somit:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N}(2k-1) + \sum_{k=1}^{N} 2k &= \sum_{k=1}^{2N} k \\ \sum_{k=1}^{N}(2k-1) &= \frac{2N \cdot (2N+1)}{2} - N \cdot (N+1) = \frac{2N \cdot (2N+1) - 2N \cdot (N+1)}{2} \\ &= \frac{4 \cdot N^2 + 2N - 2 \cdot N^2 - 2N)}{2} = \frac{2 \cdot N^2}{2} = N^2 \end{aligned}$$

Man kann auch von allen geraden Zahlen eine 1 abziehen und erhält 2 mal die Summe der N ersten ungeraden Zahlen, korrigiert um die N Abzüge:

$$(1{+}3{+}\cdots{+}2N{-}1){+}(2{+}4{+}\cdots{+}2N) = (1{+}3{+}\cdots{+}2N{-}1){+}(1{+}3{+}\cdots{+}2N{-}1){+}N$$

Daraus folgt mittels Formel (1) [mit $2N$ statt N]:

$$\sum_{k=1}^{2N} k = \frac{2N \cdot (2N+1)}{2} = 2 \cdot \sum_{k=1}^{N}(2k-1) + N$$

Mit einigen Umformungen folgt:

$$\sum_{k=1}^{N}(2k-1) = 1/2 \cdot \left(\frac{2N \cdot (2N+1)}{2} - N\right) = 1/2 \cdot \left(\frac{4 \cdot N^2 + 2N - 2N}{2}\right) = N^2$$

Also gilt für die Summe der N ersten ungeraden Zahlen:

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}(2k-1) = N^2$

Zuletzt der Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Zuerst muss für eine Zahl N die Formel (3) bewiesen werden, der Einfachheit halber hier mit $N = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2-1 = 1$$

Induktionsvoraussetzung: Die Formel sei bewiesen bis zur Zahl N:

$$\sum_{k=1}^{N}(2k-1) = N^2$$

Induktionsbehauptung: Dann gilt diese Formel auch für $N+1$:

$$\sum_{k=1}^{N+1}(2k-1) = (N+1)^2$$

Induktionsbeweis (Induktionsschritt):

$$\sum_{k=1}^{N+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{N}(2k-1) + (2\cdot(N+1)-1) = N^2 + (2N+1) = (N+1)^2$$

Also gilt wieder der Induktionsschluss, dass die Formel (3) für alle Zahlen N ab $N = 1$ richtig ist.

D. Summe der N ersten Quadratzahlen

Schreibt man die N ersten Quadratzahlen in einer Spalte auf und in der zweiten Spalte deren Summe, sieht das für z.B. $N = 6$ so aus:

Quadratzahl	Summe
1	1
4	5
9	14
16	30
25	55
36	91

Hier ist es schwierig, eine Formel zu vermuten. Man kann aber ein Polynom 3. Grades ansetzen und dessen Koeffizienten durch Einsetzen einiger Zahlen bestimmen.

Ein Polynom 3. Grades wird es deshalb sein, weil erst die Differenzen der Differenzen der Differenzen konstant sind, hier zuerst mit einem Beispiel:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & 5 & & 14 & & 30 & & 55 & & 91 \\
& 4 & & 9 & & 16 & & 25 & & 36 & \\
& & 5 & & 7 & & 9 & & 11 & & \\
& & & 2 & & 2 & & 2 & & &
\end{array}$$

Um einen Zufall auszuschließen, formuliert man allgemein:

$$\begin{array}{ccccccc}
\sum_1^{N-2} k^2 & & \sum_1^{N-1} k^2 & & \sum_1^{N} k^2 & & \sum_1^{N+1} k^2 \\
 & (N-1)^2 & & N^2 & & (N+1)^2 & \\
 & & 2N-1 & & 2N+1 & & \\
 & & & 2 & & &
\end{array}$$

Also setzt man mit den 4 noch unbekannten Koeffizienten a, b, c und d an:

$$\sum_{k=1}^{N} k^2 = a \cdot N^3 + b \cdot N^2 + c \cdot N + d$$

Mit den kleinsten Zahlen N von 1 bis 4 folgt damit:

$$\begin{aligned}
G_1&: \quad 1 = a + b + c + d \\
G_2&: \quad 5 = 8a + 4b + 2c + d \\
G_3&: \quad 14 = 27a + 9b + 3c + d \\
G_4&: \quad 30 = 64a + 16b + 4c + d
\end{aligned}$$

Subtrahiert man jeweils 2 aufeinander folgende Gleichungen, erhält man:

$$\begin{aligned}
G_2 - G_1 =: G_{2-1}&: \quad 4 = 7a + 3b + c \\
G_3 - G_2 =: G_{3-2}&: \quad 9 = 19a + 5b + c \\
G_4 - G_3 =: G_{4-3}&: \quad 16 = 37a + 7b + c
\end{aligned}$$

Weiterhin subtrahiert man wieder jeweils 2 aufeinander folgende Gleichungen und erhält:

$$\begin{aligned}
G_{3-2} - G_{2-1} =: G_{32-21}&: \quad 5 = 12a + 2b \\
G_{4-3} - G_{3-2} =: G_{43-32}&: \quad 7 = 18a + 2b
\end{aligned}$$

Und zuletzt erhält man als Differenz dieser beiden letzten Gleichungen:

$$G_{43-32} - G_{32-21}: \quad 2 = 6a$$

Daraus folgt sofort: $a = 1/3$. Eingesetzt in G_{32-21}: $5 = 12a + 2b$ erhält man $b = 1/2$.

a und b eingesetzt in G_{2-1}: $4 = 7a + 3b + c$ führt zu $c = 1/6$ und damit weiter mittels G_1: $1 = \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c} + \mathrm{d}$ folgt $d = 0$.

Also folgt als vermutete Formel für die Summe der N ersten Quadratzahlen:

$$\sum_{k=1}^{N} k^2 = 1/3 \cdot N^3 + 1/2 \cdot N^2 + 1/6 \cdot N = N/6 \cdot (2 \cdot N^2 + 3N + 1)$$

oder kürzer:

$$(4) \quad \sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N \cdot (N+1) \cdot (2N+1)}{6}$$

Das wird nun noch per vollständiger Induktion bewiesen:

Induktionsanfang: Zuerst muss für eine Zahl N die Formel bewiesen werden, der Einfachheit halber hier mit $N = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1/6 \cdot 2 \cdot 3 = 1$$

Induktionsvoraussetzung: Die Formel sei bewiesen bis zur Zahl N:

$$\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N}{6} \cdot (N+1) \cdot (2N+1)$$

Induktionsbehauptung: Dann gilt diese Formel auch für $N + 1$:

$$\sum_{k=1}^{N+1} k^2 = \frac{N+1}{6} \cdot (N+2) \cdot (2N+3)$$

Induktionsbeweis (Induktionsschritt):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{N} k^2 + (N+1)^2 = (N+1) \cdot \left(\frac{N}{6} \cdot (2N+1) + (N+1)\right) \\ &= \frac{N+1}{6} \cdot (N \cdot (2N+1) + (6N+6)) = \frac{N+1}{6} \cdot (2 \cdot N^2 + 7N + 6) \\ &= \frac{N+1}{6} \cdot (N+2) \cdot (2N+3) = \frac{(N+1) \cdot (N+2) \cdot (2N+3)}{6}\end{aligned}$$

Also gilt wieder der Induktionsschluss, dass die Formel (4) für alle Zahlen N ab $N = 1$ richtig ist.

E. Summe der Quadrate der N ersten ungeraden Zahlen

Die Summe der Quadrate der N ersten ungeraden Zahlen ist mit einem Trick bestimmbar: Man schreibt alle Quadratzahlen bis $2N$ auf, und dann die Quadrate der geraden Zahlen als (ungerade $+1)^2$, also $(k + 1)^2$, danach umgeformt zu $k^2 + 2k + 1$:

$$\begin{aligned}&1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + (2N-1)^2 + (2N)^2 \\ &\quad = 1^2 + (1+1)^2 + 3^2 + (3+1)^2 + \cdots + (2N-1)^2 + ((2N-1)+1)^2 \\ &\quad = 1^2 + (1^2 + 2 \cdot 1 + 1) + 3^2 + (3^2 + 2 \cdot 3 + 1) + \cdots + \\ &\qquad\quad + (2N-1)^2 + ((2N-1)^2 + 2 \cdot (2N-1) + 1) \\ &\quad = 1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2 + \cdots + (2N-1)^2 + (2N-1)^2 + \\ &\qquad\quad + 2 \cdot (1 + 3 + \cdots + (2N-1)) + (1 + 1 + \cdots + 1)\end{aligned}$$

Dies ist gerade 2 Mal die gesuchte Summe der Quadrate der N ersten ungeraden Zahlen + 2 Mal die Summe der N ersten ungeraden Zahlen + N.
Etwas mathematischer formuliert also:

$$\sum_{k=1}^{2N} k^2 = 2 \cdot \sum_{k=1}^{N} (2k-1)^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{N} (2k-1) + N$$

Die gesuchte Summe alleine gestellt ergibt:

$$\sum_{k=1}^{N}(2k-1)^2 = 1/2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{2N} k^2 - 2 \cdot \sum_{k=1}^{N}(2k-1) - N\right)$$

Mit den bekannten Formeln (4) [mit $2N$ statt N] und (3) eingesetzt folgt nach dem Ausklammern von $N/6$:

$$\sum_{k=1}^{N}(2k-1)^2 = 1/2 \cdot \left(\frac{2N}{6} \cdot (2N+1) \cdot (4N+1) - 2 \cdot N^2 - N\right)$$
$$= \frac{N}{6} \cdot ((2N+1) \cdot (4N+1) - 6N - 3) = \frac{N}{6} \cdot (8 \cdot N^2 - 2)$$

$$(5) \quad \sum_{k=1}^{N}(2k-1)^2 = \frac{N \cdot (4 \cdot N^2 - 1)}{3} \quad \text{oder} \quad \frac{N \cdot (2N-1) \cdot (2N+1)}{3}$$

F. Summe der Quadrate der N ersten geraden Zahlen

Die Summe der Quadrate der N ersten geraden Zahlen ist wieder sehr einfach als Differenz der Formeln (4) [mit $2N$ statt N] und (5) zu ermitteln:

$$\sum_{k=1}^{N}(2k)^2 = \sum_{k=1}^{2N} k^2 - \sum_{k=1}^{N}(2k-1)^2$$
$$= (2N)/6 \cdot (2N+1) \cdot (4N+1) - N/3 \cdot (4 \cdot N^2 - 1)$$
$$= N/3 \cdot \big((2N+1) \cdot (4N+1) - (4 \cdot N^2 - 1)\big)$$
$$= N/3 \cdot (8 \cdot N^2 + 6N + 1 - 4 \cdot N^2 + 1) = N/3 \cdot (4 \cdot N^2 + 6N + 2)$$

Das ergibt eine der Formel (4) analoge Formel – mit dem zusätzlichen Faktor $2^2 = 4$:

$$(6) \quad \sum_{k=1}^{N}(2k)^2 = \frac{2N \cdot (N+1) \cdot (2N+1)}{3}$$

G. Summe der N ersten Kubikzahlen

Die Summe der N ersten Kubikzahlen ist wieder einfacher zu bestimmen:

Schreibt man die N ersten Kubikzahlen in einer Spalte auf, in einer zweiten Spalte deren Summe und in einer dritten Spalte die Quadrate, erhält man zum Beispiel für $N = 5$:

Zahlen	Summe	Quadrate
1	1	1^2
8	9	3^2
27	36	6^2
64	100	10^2
125	225	15^2

Die in den Quadraten vorkommende Folge $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$ ist die bekannte Summe der N ersten Zahlen (die Dreieckszahlen), also Formel (1).

Damit folgt unmittelbar:

$$(7)\ \sum_{k=1}^{N} k^3 = \left(\frac{N \cdot (N+1)}{2}\right)^2$$

Der Beweis durch vollständige Induktion ist ebenfalls einfach, weshalb nur der Induktionsschritt gezeigt werden soll:

Durch Ausklammern von $1/4 \cdot (N+1)^2$ folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{N} k^3 + (N+1)^3 = \left(\frac{N \cdot (N+1)}{2}\right)^2 + (N+1)^3 \\
&= 1/4 \cdot (N+1)^2 \cdot \big(N^2 + 4 \cdot (N+1)\big) = 1/4 \cdot (N+1)^2 \cdot \big(N^2 + 4N + 4)\big) \\
&= \frac{(N+1)^2 \cdot (N+2)^2}{4} = \left(\frac{(N+1) \cdot (N+2)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Da der Induktionsanfang trivial ist, folgt wieder, dass Formel (7) für alle N ab $N = 1$ richtig ist.

H. Summe der Kuben der N ersten geraden Zahlen

Die Formel für die Summe der Kuben der N ersten geraden Zahlen ist einfach herleitbar: In der Summe $2^3 + 4^3 + \cdots + (2N)^3$ wird einfach 2^3 ausgeklammert:

$$(8)\ \sum_{k=1}^{N} (2k)^3 = 2^3 \cdot \sum_{k=1}^{N} k^3 = 2^3 \cdot \left(\frac{N \cdot (N+1)}{2}\right)^2 = 2 \cdot (N \cdot (N+1))^2$$

Die Summe ist einfach wegen $2^3 = 8$ das Achtfache der Formel (7).

I. Summe der Kuben der N ersten ungeraden Zahlen

Die Formel für die Summe der Kuben der N ersten ungeraden Zahlen ist wieder aus der Differenz der Formeln (7) [mit $2N$ statt N] und (8) bestimmbar:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} (2k-1)^3 &= \sum_{k=1}^{2N} k^3 - \sum_{k=1}^{N} (2k)^3 \\
&= \left(\frac{2N \cdot (2N+1)}{2}\right)^2 - 2 \cdot (N \cdot (N+1))^2 \\
&= N^2 \cdot (2N+1)^2 - 2 \cdot N^2 \cdot (N+1)^2 = N^2 \cdot \big((2N+1)^2 - 2 \cdot (N+1)^2\big) \\
&= N^2 \cdot (4 \cdot N^2 + 4N + 1 - 2 \cdot N^2 - 4N - 2)
\end{aligned}$$

Und damit sofort:

$$(9)\quad \sum_{k=1}^{N}(2k-1)^3 = N^2 \cdot (2 \cdot N^2 - 1)$$

J. Summe der N ersten Fibonacci-Zahlen

Die Fibonacci-Zahlen f_N werden durch zwei Anfangswerte und eine Rekursionsformel definiert: Anfangswerte: $f_1 = 1$ und $f_2 = 1$ (heute auch noch $f_0 = 0$).
Rekursive Definition der nachfolgenden Zahl als Summe der jeweils zwei vorhergehenden Zahlen (ab der 3. Zahl):

$$f_N = f_{N-2} + f_{N-1}$$

Damit sieht die Folge der ersten 10 Fibonacci-Zahlen so aus:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$$

Die Fibonacci-Zahlen haben viele interessante Eigenschaften.
Zum Beispiel nähert sich der Quotient zweier aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen dem Goldenen Schnitt $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803\ldots$

Auch in der Natur tauchen sie auf, zum Beispiel als Anzahl von Blütenblättern oder Spiralen-Längen bei Sonnenblumen; insbesondere die Beschreibung des Wachstums der Anzahl von Kaninchenpaaren (bei denen jedes Paar ab dem 2. Monat ein neues Paar pro Monat erzeugt) ist wohl das bekannteste Beispiel.

Schreibt man für die Summe der N ersten Fibonacci-Zahlen diese in einer Spalte auf und in einer zweiten Spalte deren Summe, erhält man zum Beispiel für $N = 6$:

Zahlen	Summe
1	1
1	2
2	4
3	7
5	12
8	20

Mit etwas Glück erkennt man hier die Regel: Jede Summe der N ersten Fibonacci-Zahlen ist gleich der $(N+2)$-ten (also übernächsten) Fibonacci-Zahl, jedoch vermindert um 1:

$$(10)\quad \sum_{k=1}^{N} f_k = f_{N+2} - 1$$

Der Beweis durch vollständige Induktion ist wegen Formel (10) einfach, weshalb nur der Induktionsschritt gezeigt werden soll:

$$\sum_{k=1}^{N+1} f_k = \sum_{k=1}^{N} f_k + f_{N+1} = (f_{N+2} - 1) + f_{N+1} = (f_{N+1} + f_{N+2}) - 1 = f_{N+3} - 1$$

Das ist nach der oben angegebenen Rekursionsformel $f_N = f_{N-2} + f_{N-1}$ richtig.

K. Summe der N ersten Lucas-Zahlen und Padovan-Zahlen

Die Lucas-Zahlen L_N werden ebenfalls durch zwei Anfangswerte und eine Rekursionsformel definiert. Der einzige Unterschied zu der Defintion der Fibonacci-Zahlen ist der Anfangswert $L_1 = 2$ statt 1.

Damit sieht die Folge der ersten 10 Lucas-Zahlen so aus:

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76$$

Interessant ist der Zusammenhang mit den Fibonacci-Zahlen, insbesondere:

$$L_N = f_{N-2} + f_N$$
$$f_{2N} = f_N \cdot L_{N+1}$$

Lucas-Zahlen haben z.B. die Eigenschaft, dass eine Spirale gezeichnet werden kann, die durch Zeichnen von Viertelbögen in Quadraten gebildet wird, deren Seitenlängen den Lucas-Zahlen entsprechen, siehe
`https://de.wikipedia.org/wiki/Lucas-Folge#/media/Datei:Lucas_number_spiral.svg`

Die Summe der N ersten Lucas-Zahlen ist genauso leicht erkennbar und beweisbar wie bei den Fibonacci-Zahlen.

$$\sum_{k=1}^{N} L_k = L_{N+2} - 1$$

Der Beweis geht analog dem der Fibonacci-Zahlen durch vollständige Induktion.

Ähnliches gilt für die ebenfalls durch Rekursion definierten Padovan-Zahlen P_N mit drei gleichen Anfangswerten 1 und der etwas anderen Rekursionsformel:

$$P_N = P_{N-3} + P_{N-2}$$

Damit sieht die Folge der ersten 10 Padovan-Zahlen so aus:

$$1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9$$

Die Summe der N ersten Padovan-Zahlen ähnelt der der Fibonacci-Zahlen und Lucas-Zahlen, aber mit etwas anderen Parametern, ist aber analog erkennbar und beweisbar.

$$\sum_{k=1}^{N} P_k = P_{N+5} - 2$$

L. Literatur-Empfehlung

Hans Magnus Enzensberger: Der Zahlenteufel. Ein Kopfkissenbuch für alle, die Angst vor der Mathematik haben. Mit Bildern von Rotraut Susanne Berner. 1997, dtv, Reihe Hanser, ISBN 978-3-446-18900-3.

MacTeX 2020/pdflatex → https://www.sarahandrobin.com/ingo/summen-ganzer-zahlen.pdf,
https://www.sarahandrobin.com/ingo/index.html