Pythagoreische Tripel

Ingolf Giese

Mai 2018

Pythagoreische Tripel - oder Pythagoreische Zahlentripel - sind drei (positive) ganze Zahlen, bei denen die Summe der Quadrate der beiden kleineren Zahlen gleich dem Quadrat der dritten Zahl ist. Sie können also (wegen dem Satz von Pythagoras) als Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks aufgefasst werden, wobei die größte Zahl die Hypotenuse ist. Die drei Zahlen werden im Allgemeinen der Größe nach geordnet notiert:

(1) $\quad (x, y, z) \quad$ mit $\quad x^2 + y^2 = z^2 \quad$ und $\quad x < y$

Pythagoreische Tripel sind seit etwa 3500 bis 4000 Jahren bekannt.
Das bekannteste Beispiel ist das Tripel $(3, 4, 5)$: $\quad 3^2+4^2 = 5^2$ ("Zwölfknotenschnur").

Mit jedem Pythagoreischen Tripel gibt es unendlich viele daraus abgeleitete Vielfache: Ist (x, y, z) ein Pythagoreisches Tripel, so ist auch $(f \cdot x, f \cdot y, f \cdot z)$ ein Pythagoreisches - aber sehr langweiliges - Tripel. Die Tripel, die nicht weiter verkleinert werden können, heißen primitive (oder ursprüngliche, elementare) Pythagoreische Tripel.

Das sind die einzig interessanten Tripel, und diese werden hier untersucht.

A. Erste Beobachtungen

Die einfachste Methode, primitive Pythagoreische Tripel (x, y, z) zu finden, ist ein Programm mit einer geschachtelten Laufschleife für x und y (mit $x < y$), das für alle Zahlen x und y bis zu einer Maximalzahl N die Wurzel aus $x^2 + y^2$ berechnet und das Tripel ausgibt, wenn dies eine ganze Zahl z, die auch kleiner oder gleich N sein soll, ergibt. Dabei muss gleichzeitig bei einem gefundenen Tripel geprüft werden, ob dieses nicht ein Vielfaches eines vorherigen Tripels ist.

Für $N = 101$ findet man 17 Tripel. Für die Reihenfolge der Ausgabe gibt es mehrere Möglichkeiten, z.B. sortiert nach der ersten (x) bzw. letzten Zahl (z). In der folgenden Tabelle wurde nach der Summe aller drei Zahlen sortiert (Unterschied erst am Ende); außerdem wird auch die Differenz $d_{yz} = z - y$ angegeben:

(x,	y,	z)	$d_{yz} = z - y$
(3,	4,	5)	1
(5,	12,	13)	1
(8,	15,	17)	2
(7,	24,	25)	1
(20,	21,	29)	8
(12,	35,	37)	2
(9,	40,	41)	1
(28,	45,	53)	8
(11,	60,	61)	1
(16,	63,	65)	2
(33,	56,	65)	9
(48,	55,	73)	18
(13,	84,	85)	1
(36,	77,	85)	8
(39,	80,	89)	9
(20,	99,	101)	2
(65,	72,	97)	25

Dabei fällt folgendes auf, was auch bei Rechnungen mit höherem N beobachtet wurde:

a) Von den beiden ersten Zahlen x und y ist genau eine gerade, die andere ungerade; d.h. alle dritten Zahlen z sind deshalb ungerade.

b) Es gibt keine Anfangszahlen x (neben den Sonderfällen 1, 2 und 4) mit $6, 10, 14, \ldots$, die also gerade, aber nicht durch 4 teilbar sind.

c) Alle Differenzen $d_{yz} = z - y$ haben nur bestimmte Werte, wobei die Differenz 1 am häufigsten auftritt: 1, 2, 8, 9, 18, 25 (, ...)

Diese Differenzen sind von der Form: Quadrat einer ungeraden Zahl, also $(2m+1)^2$ bzw. das Doppelte einer Quadratzahl, also $2 \cdot m^2$.
Hier also $1^2 = 1$ (6 Mal), $3^2 = 9$ und $5^2 = 25$ bzw. $2 \cdot 1^2 = 2$, $2 \cdot 2^2 = 8$ und $2 \cdot 3^2 = 18$.

d) Dabei haben die Tripel mit den Differenzen der Form "Quadrat einer ungeraden Zahl" ("Typ 1") immer eine gerade Zahl als zweite Zahl y, während bei den anderen Tripeln die erste Zahl x gerade ist ("Typ 2").

Für den einfachen Fall der Differenz $d_{yz} = z - y = 1$ kann man leicht alle Tripel mit dieser Eigenschaft erzeugen:

$$x^2 + y^2 = (y+1)^2 = z^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = 2y + 1 \quad \rightarrow$$
$$y = \left(\frac{x^2 - 1}{2}\right) = \left(\frac{(2m+1)^2 - 1}{2}\right) = 2m \cdot (m+1) \qquad \text{bei} \quad x = 2m + 1$$

Denn für ungerades x (also z.B. $2m+1$) ist auch x^2 ungerade, und damit lässt sich $x^2 - 1$ durch 2 teilen, so dass auch y ganzzahlig, d.h. $2m \cdot (m+1)$, ist.

Damit erhält man (mit $m = 1, 2, 3, 4, \ldots$) die Tripel:
$(3, 4, 5)$; $(5, 12, 13)$; $(7, 24, 25)$; $(9, 40, 41)$; ...

Für den einfachen Fall der Differenz $d_{yz} = z - y = 2$ folgt:

$$\begin{array}{lllllll} x^2 + y^2 & = & (y+2)^2 & = & z^2 & \rightarrow & x^2 \;=\; 4y + 4 \quad \rightarrow \\ y & = & \left(\dfrac{x^2 - 4}{4}\right) & = & \left(\dfrac{(4n)^2 - 4}{4}\right) & = & 4n^2 - 1 \qquad \text{bei} \;\; x \;=\; 4n \end{array}$$

Denn ist x gerade, also z.B. $x = 2m$, folgt $y = m^2 - 1$. Ist dabei m aber ungerade, also z.B. $m = 2n+1$, ist $y = 4n^2+4n$, d.h. auch y ist gerade und somit auch z $(= y+2)$; damit sind aber alle Zahlen des Tripels durch 2 teilbar, was somit nicht zu einem primitiven Pythagoreischen Tripel führt. Also muss m gerade sein: $x = 2m = 2(2n) = 4n$ $(n > 1)$.

Insgesamt erhält man also nur mit $x = 4n$ primitive Tripel (z.B. mit $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$): $(8, 15, 17)$; $(12, 35, 37)$; $(16, 63, 65)$; $(20, 99, 101)$; $\ldots$

B. Verbesserte Berechnungen

Erzeugende Formeln

Schon etwa 630 v.Chr. wurden von dem indischen Mathematiker Brahmagupta (und später auch von Euklid) die folgenden erzeugenden Formeln angegeben:
Typ 1:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{lllllll} x & = & u^2 - v^2 & = & (u+v)(u-v) \\ y & = & 2uv \\ z & = & u^2 + v^2 \\ \text{mit} & d_{yz} & := & z - y & = & u^2 + v^2 - 2uv & = \;\; (u-v)^2 \end{array} \right.$$

Typ 2 (Vertauschen der ersten beiden rechten Seiten):

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{lllllll} x & = & 2uv \\ y & = & u^2 - v^2 & = & (u+v)(u-v) \\ z & = & u^2 + v^2 \\ \text{mit} & d_{yz} & := & z - y & = & u^2 + v^2 - (u^2 - v^2) & = \;\; 2v^2 \end{array} \right.$$

Dabei können mit beliebigen positiven ganzen Zahlen u und v (mit $u > v$) alle Pythagoreischen Tripel erzeugt werden. Die erzeugten Tripel sind genau dann primitiv, wenn u und v teilerfremd (Erklärungen dazu im Anhang) und nicht beide ungerade sind. Denn wenn u und v einen gemeinsamen Teiler haben, haben auch x, y und z diesen gemeinsamen Teiler und sind damit kein primitives Pythagoreisches Tripel. Und wenn u und v beide ungerade sind, ist aber $u^2 - v^2$ (und auch $u^2 + v^2$) gerade, und da $2uv$ sowieso gerade ist, hat man wegen dem gemeinsamen Faktor 2 ebenfalls kein primitives Tripel.

Bei Typ 1 ist die zweite Zahl y gerade, und da nicht beide Größen u und v gerade sein sollen, ist $u - v$ ungerade, also auch $d_{yz} = (u - v)^2$ ungerade.
Das ist genau die Beobachtung des vorhergehenden Kapitels, dass bestimmte Tripel das Quadrat einer ungeraden Zahl als Differenz haben.

Da wegen der üblichen Notation in der Größe der Zahlentripel $x < y$ sein soll, folgt

$$\begin{aligned} x < y \quad &\rightarrow \quad u^2 - v^2 < 2uv \quad \rightarrow \quad u^2 - 2uv + v^2 < 2v^2 \\ &\rightarrow \quad (u-v)^2 < 2v^2 \quad \text{also insgesamt:} \quad v < u < (1+\sqrt{2})\, v \end{aligned}$$

Bei Typ 2 ist die erste Zahl x gerade, und die Differenz ist mit $2v^2$ das Zweifache einer Quadratzahl, wie ebenfalls oben schon beschrieben wurde.

Da hier ebenfalls $x < y$ sein soll, folgt für die Beziehungen zwischen u und v:

$$\begin{aligned} x < y \quad &\rightarrow \quad 2uv < u^2 - v^2 \quad \rightarrow \quad 2v^2 < u^2 - 2uv + v^2 \\ &\rightarrow \quad 2v^2 < (u-v)^2 \quad \text{also insgesamt:} \quad (1+\sqrt{2})\, v < u < \sqrt{N}\, v \end{aligned}$$

D.h.: Das Verhältnis u/v entscheidet, ob ein Tripel vom Typ 1 oder Typ 2 ist.

Nachweis der Richtigkeit der erzeugenden Formeln durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 &= u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 \\ &= u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = (u^2 + v^2)^2 = z^2 \end{aligned}$$

Betrachtet man die babylonische Multiplikationsformel (die auch aus den Binomischen Formeln folgt):

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \quad \text{also:} \quad 4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$$

dann folgt daraus direkt

(4) $\qquad (a-b)^2 + 4ab = (a+b)^2$

Setzt man dort $a = u^2$ und $b = v^2$ ein, erhält man die erzeugenden Formeln.

Man kann sich die Gleichung (1) $x^2 + y^2 = z^2$ auch als Punkte (x, y) auf dem Kreis mit dem Radius z vorstellen. Auf den Einheitskreis normiert heißt das

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1$$

Die Pythagoreischen Tripel entsprechen also allen Punkten auf dem Einheitskreis, die rationale Zahlen als Koordinaten haben, also z.B.:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$

Und aus Gleichung (1) folgt auch der interessante Zusammenhang: $x^2 = (z+y)(z-y)$.

C. Analysen

Die erzeugenden Formeln nach Gleichung (2) bzw. (3) wurden für verschiedene Maximalzahlen N berechnet. Dabei lagen die Rechenzeiten bei z.B. $N = 250000$ im Sekundenbereich (0.2 Sekunden), während sie nach der "einfachen" Methode aus Kapitel A bei knapp 8 Stunden (!) lag (2014er MacBook Pro und php).

Anzahl der gefundenen primitiven Tripel in Abhängigkeit von N (bis 10 Milliarden):

N	Anzahl
10 000	1 593
100 000	15 919
1 000 000	159 139
10 000 000	1 591 579
100 000 000	15 915 492
1 000 000 000	159 154 994
10 000 000 000	1 591 549 475

Das zeigt die erstaunliche Eigenschaft, dass für beliebiges N die Anzahl der Tripel der ziemlich **konstante Prozentsatz 15.915%** ist!

Anzahl von Typ 1 (zweite Zahl y gerade) und Typ 2 (erste Zahl x gerade) in Abhängigkeit von N:

N	Typ 1	Typ 2
10 000	799	794
100 000	7 961	7 958
1 000 000	79 574	79 565
10 000 000	795 789	795 790
100 000 000	7 957 753	7 957 739
1 000 000 000	79 577 506	79 577 488
10 000 000 000	795 774 864	795 774 611

Hier sieht man - was wohl nicht offensichtlich ist -, dass **beide Typen etwa gleich häufig** sind, und im Allgemeinen ist dabei Typ 1 geringfügig häufiger als Typ 2. Und das gilt, obwohl die nachfolgende Tabelle zeigt, dass bei Typ 1 die häufigsten Differenzen liegen.

Anzahl der häufigsten Differenzen bei Typ 1 (zweite Zahl y gerade) - das ist die Zahl 1 - und bei Typ 2 (erste Zahl x gerade) - das ist die Zahl 2 (an der angegebenen Position):

N	$d_{yz} = 1$	$sqrt(N/2)$	$d_{yz} = 2$	$1/2 \cdot sqrt(N)$	an Position
10 000	70	70.7	48	50.0	6
100 000	223	223.6	157	158.1	15
1 000 000	706	707.1	498	500.0	41
10 000 000	2 235	2 236.1	1 580	1 581.1	132
100 000 000	7 070	7 071.1	4 998	5 000.0	421
1 000 000 000	22 360	22 360.7	15 810	15 811.4	1 319
10 000 000 000	70 710	70 710.7	49 998	50 000.0	4 135

Man erkennt die einfache Regel: Die Grenzen $\sqrt{\frac{N}{2}}$ bei Typ 1 und $\frac{1}{2}\sqrt{N}$ bei Typ 2 werden ziemlich genau erreicht.

Das liegt bei Typ 1 an der erzeugenden Formel nach Gleichung (2) für $d_{yz} = 1$ $(u > v)$:

$$
\begin{aligned}
&d_{yz} \;=\; z - y \;=\; u^2 + v^2 - 2uv \;=\; (u-v)^2 \;=\; 1 \quad \rightarrow \\
&u - v \;=\; 1 \quad \rightarrow \quad z \;=\; u^2 + v^2 \;=\; (v+1)^2 + v^2 \;=\; 2v^2 + 2v + 1
\end{aligned}
$$

Wenn $z \leq N$ sein soll, folgt daraus, da hier auch v zwischen 1 und N liegt:

$$\text{Anzahl} \;=\; -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{N}{2} - \frac{1}{4}} \qquad \text{also etwa:} \quad \text{Anzahl} \;\approx\; \sqrt{\frac{N}{2}}$$

Die jeweils nachfolgend häufigste Differenz ist bei Typ 1 jedes Mal (also abhängig von N) eine andere Quadratzahl, die aber im Allgemeinen etwa 2^{m-1} bis 2^m Mal seltener auftritt, wobei $N = 10^m$ ist.

Bei Typ 2 ist der Häufigkeits-Nachfolger der Zahl 2 immer direkt die Zahl 8, die im Allgemeinen gleich oft oder nur minimal weniger auftritt. Die danach folgenden häufigsten Differenzen (mit nur wenig geringerer Häufigkeit) sind wie 2 und 8 ebenfalls von der Form 2^{2n+1} mit $n = 2, 3, 4, \ldots, m-1$ bzw. m (bei $N = 10^m$).

Für die Abschätzung der Häufigkeit der Differenz 2 folgt aus der erzeugenden Formel nach Gleichung (3) mit $d_{yz} = 2$:

$$\begin{aligned} &d_{yz} \;=\; z - y \;=\; u^2 + v^2 - (u^2 - v^2) \;=\; 2v^2 \;=\; 2 \quad \rightarrow \\ &v^2 \;=\; 1 \quad \rightarrow \quad z \;=\; u^2 + v^2 \;=\; u^2 + 1 \end{aligned}$$

Wenn $z \leq N$ sein soll, folgt daraus, da hier wegen v ungerade $u = 2m$ nur gerade ist (und u auch zwischen 1 und N liegt):

$$\text{Anzahl} \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{N-1} \qquad \text{also ebenfalls etwa:} \quad \text{Anzahl} \;\approx\; \frac{1}{2}\sqrt{N}$$

P.S: Aus Gleichung (3) folgt bei $d_{yz} = 2$ und also $v = 1$, und da u gerade sein muss, gilt mit z.B. $u = 2m$:

$$\begin{aligned} x &= 4m \\ y &= 4m^2 - 1 \\ z &= 4m^2 + 1 \end{aligned}$$

D.h. es gibt beliebig viele primitive Tripel der Form mit einem Vielfachen von 4 als erster Zahl ($m > 1$).

Ein ähnliches Ergebnis für die Anzahl der Tripel erhält man für $d_{yz} = 8$:

$$\begin{aligned} &d_{yz} \;=\; z - y \;=\; u^2 + v^2 - (u^2 - v^2) \;=\; 2v^2 \;=\; 8 \quad \rightarrow \\ &v \;=\; \sqrt{4} \;=\; 2 \quad \rightarrow \quad z \;=\; u^2 + v^2 \;=\; u^2 + 16 \end{aligned}$$

Wenn $z \leq N$ sein soll, folgt daraus, da hier u zwischen 5 und N und nur ungerade (da v gerade ist) ist:

$$\text{Anzahl} \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{N-16} - \frac{1}{2} \qquad \text{also auch etwa:} \quad \text{Anzahl} \;\approx\; \frac{1}{2}\sqrt{N}$$

Insgesamt folgt:
Die Anfangszahlen x sind entweder alle ungerade ($2m + 1$ bei Typ 1) oder alle von der Form $4m$ (bei Typ 2), **aber nicht von der Form 4m + 2** $(6, 10, 14, 18, \ldots)$, weil $2uv = 2(2m+1)(2n) = 8mn + 4n$ kein "+2" ermöglicht.

Ähnlich dem Fall $d_{yz} = 2$ gibt es auch bei $d_{yz} = 8$ wegen $v = 2$ und daher ungeradem $u = 2m + 1$ eine feste Form für die Anfangszahl $x = 2uv = 8m + 4$; diese Anfangszahlen treten also (mindestens) zwei Mal auf. Das gilt analog auch für die anderen Differenzen bei Typ 2.

Bestimmte Ausgangszahlen

Sucht man ein Tripel zu einer bestimmten Ausgangszahl x, gilt für eine gerade Zahl (also $x = 4m$), dass $x = 2uv$ und somit $uv = 2m$ sein muss. Dazu ermittelt man die Primfaktorzerlegung von $2m$ (erweitert um die 1) und schreibt alle Kombinationen (u, v) auf, für die zusätzlich $u > (1 + \sqrt{2})v$ gilt.

Beispiel:
$x = 60$, also $30 = uv$. Die 30 ist zerlegbar in $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, d.h. es gibt drei Paare (10, 3), (15, 2), (30, 1), denn bei (6, 5) und weiteren gilt die Nebenbedingung nicht.

So findet man für $x = 60$ also 3 Tripel mit gleicher Anfangszahl:

(x, y, z)	aus u	und v	$d_{yz} = z - y$
(60, 91, 109)	10	3	18
(60, 221, 229)	15	2	8
(60, 899, 901)	30	1	2

Bei einer ungeraden Anfangszahl $x = 2m + 1$ mit $x = u^2 - v^2 = (u + v)(u - v) = ab$ zerlegt man $2m + 1$ analog dem Fall der geraden Anfangszahl in Kombinationen (a, b). Dann ist $u = (a + b)/2$ und $v = (a - b)/2$, wobei hier $u < (1 + \sqrt{2})v$ gelten muss.

Beispiel:
$x = 33$, also $33 = (u+v)(u-v) = ab$ mit $33 = 1 \cdot 3 \cdot 11$. Das führt zu den ab-Paaren (11, 3) und (33, 1) und anderen. Daraus folgen die uv-Paare ((11+3)/2, (11-3)/2) = (7, 4) und ((33+1)/2, (33-1)/2) = (17, 16), bei den weiteren gilt die Nebenbedingung nicht.

So findet man für $x = 33$ also 2 Tripel mit gleicher Anfangszahl:

(x, y, z)	aus u	und v	$d_{yz} = z - y$
(33, 56, 65)	7	4	9
(33, 544, 545)	17	16	1

Differenz y-x

Eine ganz andere Methode zur Erzeugung von Tripeln mit gleicher (bisher nicht untersuchter) Differenz $d_{xy} = y - x$ ist die folgende:
Man nimmt ein vorhandenes Tripel, das aus dem Paar (u, v) erzeugt wurde, und bildet ein nachfolgendes uv-Paar durch $(u', v') = (2u + v, u)$. Mit diesen neuen Werten erhält man ein neues Tripel, das die gleiche Differenz d_{xy} hat: Wegen $y - x = 2uv - (u^2 - v^2)$ folgt für das nachfolgende Tripel $y' - x' = u'^2 - v'^2 - 2u'v' = (2u+v)^2 - u^2 - 2(2u+v)u = 4u^2 + 4uv + v^2 - u^2 - 4u^2 - 2uv = 2uv - (u^2 - v^2)$, also die gleiche Differenz.

Beispiel mit der Differenz $d_{xy} = 1$:
(3, 4, 5) wurde aus dem uv-Paar (2, 1) erzeugt. Das neue Paar $(2 \cdot 2 + 1, 2) = (5, 2)$ erzeugt dann das Tripel (20, 21, 29) – mit der gleichen Differenz $d_{xy} = 1$. Weiter entsteht

aus diesem uv-Paar (5, 2) das Nachfolgepaar $(2 \cdot 5 + 2, 5) = (12, 5)$ und daraus das Tripel (119, 120, 169) u.s.w.

(x,	y,	z)	aus u	und v	$d_{xy} = y - x$
(3,	4,	5)	2	1	1
(20,	21,	29)	5	2	1
(119,	120,	169)	12	5	1
(696,	697,	985)	29	12	1
(4059,	4060,	5741)	70	29	1

Die Folge der uv-Werte ist hier $1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, \ldots$ (auch die z-Werte sind dort enthalten!). Sie hat die Eigenschaft, dass zwei aufeinanderfolgende Werte ein Verhältnis (größere gegen kleinere Zahl) haben, das gegen $1 + \sqrt{2}$ geht. So ist noch $70/29 = 2.41379\ldots$, aber schon $2378/985 = 2.4142131\ldots$ bei $1 + \sqrt{2} = 2.4142135\ldots$.

Interessanterweise gilt diese Eigenschaft auch für alle die Tripel, die mit größerer Differenz d_{xy} erzeugt werden, z.B. $46/19 = 2.4211\ldots$ bei $d_{xy} = 7$ (s. unten).

Und natürlich geht dann (bei der kleinen Differenz $d_{xy} = 1$) das Verhältnis z/y bzw. z/x gegen $\sqrt{2}$, z.B. $5741/4060 = 1.41404\ldots < \sqrt{2} < 5741/4059 = 1.41439\ldots$.

Die nächste mögliche Differenz $d_{xy} = y - x$ ist 7, nachfolgende sind 17, 23, 31, 41, 47, 49, 71, 73, 79, 89, 97, 103, 113, 119, 127, 137, 151, 161, 167, 191, 193, 199, 217, 223, ...

Es fällt dabei auf, dass das alles Primzahlen sind oder Produkte (nur!) dieser Primzahlen (hier z.B. $7 \cdot 7 = 49$, $7 \cdot 17 = 119$, $7 \cdot 23 = 161$), wobei auch mehr als zwei Faktoren vorkommen, z.B. $7 \cdot 17 \cdot 23 = 2737$ eine (sogar häufig vorkommende) Differenz ist. Außerdem sieht man, dass es wesentlich mehr verschiedene d_{xy}-Differenzen gibt als es verschiedene d_{yz}-Differenzen gibt.

Bei der Differenz 7 gibt es zwei getrennte Folgen, bei höheren Differenzen sogar mehrere "parallele" Folgen. Bei der Differenz 119 sind es 4 Folgen (Anfangspaare (12, 1), (11, 8), (18, 5) und (19, 10)), bei $7 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 31 = 84847$ sind es sogar 16 Folgen (immer 2^n).

Die Differenz 7 erhält man z.B. mit $(u, v) = (3, 2)$, was dem Tripel (5, 12, 13) entspricht. Dann bildet man wieder das nachfolgendes uv-Paar durch $(u', v') = (2u + v, u)$, hier also $(2 \cdot 3 + 2, 3) = (8, 3)$; das erzeugt das Tripel (48, 55, 73).

Fängt man jedoch mit $(u, v) = (4, 1)$ an, also dem Tripel (8, 15, 17), so ist das nachfolgende uv-Paar $(2u + v, u) = (2 \cdot 4 + 1, 4) = (9, 4)$ mit (65, 72, 97) als Tripel. Beide Folgen haben aber die gleiche Differenz $d_{xy} = 7$.

(x,	y,	z)	aus u	und v	$d_{xy} = y - x$
(5,	12,	13)	3	2	7
(48,	55,	73)	8	3	7
(297,	304,	425)	19	8	7
(1748,	1755,	2477)	46	19	7

und

(	x,	y,	z)	aus u	und v	$d_{xy} = y - x$
(	8,	15,	17)	4	1	7
(	65,	72,	97)	9	4	7
(	396,	403,	565)	22	9	7
(	2325,	2332,	3293)	53	22	7

Kehrwert-Verfahren

Eine andere, ebenso außergewöhnliche Methode zum Auffinden von Pythagoreischen Tripeln ist das Kehrwert-Verfahren.

Dazu nimmt man zwei aufeinanderfolgende gerade oder ungerade Zahlen (ab der Zahl 2) und addiert deren Kehrwerte. Aus dem (eventuell durch 2) gekürzten Bruch benutzt man den Zähler als Zahl x und den Nenner als Zahl y, die dann ein Tripel erzeugen, bei denen die Differenz d_{yz} immer 2 (ungerade Zahlen) bzw. 1 (gerade Zahlen) ist.

Beispiele:
Aus den Zahlen 3 ($= a$) und 5 ($= a + 2$) folgt für die Summe der Kehrwerte:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+2} \;=\; \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \;=\; \frac{5}{15} + \frac{3}{15} \;=\; \frac{8}{15}$$

Das führt, da $x = 2a + 2$, $y = a^2 + 2a$, $z = a^2 + 2a + 2$ ist, zu dem Tripel (8, 15, 17).

Aus den Zahlen 4 und 6 folgt für die Summe dieser Kehrwerte:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \;=\; \frac{6}{24} + \frac{4}{24} \;=\; \frac{10}{24} \;=\; \frac{5}{12}$$

Damit erhält man (analog zu oben, aber mit Kürzung durch 2) das Tripel (5, 12, 13).

Da es viele Tripel gibt, bei denen die Anfangszahl gleich ist, wird bei dieser Methode jeweils nur ein Tripel erzeugt – und zwar immer das mit den höchsten y- und z-Werten, weil dort die Differenz d_{yz} immer 1 bzw. 2 ist. Die fehlenden Tripel können dann mit der Methode "Bestimmte Ausgangszahlen" erzeugt werden.

P.S.: Der Zusammenhang der **Fibonacci-Zahlen** zu Tripeln soll hier kurz erwähnt werden: Vier aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen ergeben mit $(f_k \cdot f_{k+3}, 2 \cdot f_{k+1} \cdot f_{k+2}, f_{2k+3})$ ein Pythagoreisches Tripel, das nach evtl. Kürzen von 2 immer ein primitives Tripel ist. Beispiel mit $1, 1, 2, \mathbf{3}, \mathbf{5}, \mathbf{8}, \mathbf{13}, 21, 34, 55, \mathbf{89}, \ldots$: $(\mathbf{3} \cdot \mathbf{13},\ 2 \cdot \mathbf{5} \cdot \mathbf{8},\ \mathbf{89}) = (39,\ 80,\ 89)$.

D. Anhang

Teilerfremdheit

Ob zwei ganze Zahlen teilerfremd sind, erkennt man am größten gemeinsamen Teiler. Diesen ermittelt man mit dem Euklidischen Algorithmus:

Dazu dividiert man die größere der beiden Zahlen durch die kleinere und bestimmt den Divisionsrest; das ganzzahlige Ergebnis der Division interessiert dabei nicht.
Danach dividiert man die zweite Zahl durch den Divisionsrest.

Das macht man so lange, bis der Divisionsrest 0 ist. Dann ist der vorhergehende Divisionsrest der größte gemeinsame Teiler. Dabei braucht man höchstens 5 Mal so viele Schritte wie die kleinere Ausgangszahl Stellen hat.

Ist der größte gemeinsame Teiler 1, so sind die beiden Zahlen teilerfremd. Andernfalls hat man damit einen gemeinsamen Teiler gefunden.
Beispiel mit den Zahlen 1729 und 75:

$$\begin{aligned} 1729 : 75 &= 23 \text{ Rest } 4 \\ 75 : 4 &= 18 \text{ Rest } 3 \\ 4 : 3 &= 1 \text{ Rest } 1 \\ 3 : 1 &= 3 \text{ Rest } 0 \end{aligned}$$

Der größte gemeinsame Teiler ist also 1. Die beiden Zahlen sind also teilerfremd.
Beispiel mit den Zahlen 679 und 294:

$$\begin{aligned} 679 : 294 &= 2 \text{ Rest } 91 \\ 294 : 91 &= 3 \text{ Rest } 21 \\ 91 : 21 &= 4 \text{ Rest } 7 \\ 21 : 7 &= 3 \text{ Rest } 0 \end{aligned}$$

Der größte gemeinsame Teiler ist also 7. Die beiden Zahlen sind nicht teilerfremd.

Verallgemeinerung: Fermats Letzter Satz

Interessant ist die Frage, ob es außer $n = 2$ auch für $n > 2$ ganze Zahlen gibt, die die Gleichung

$$x^n + y^n = z^n \tag{5}$$

erfüllen. Das gilt z.B. nur fast für $n = 3$:

$$6^3 + 8^3 = 216 + 512 = 728 = 729 - 1 = 9^3 - 1$$

Das ist Fermats Letzter oder Großer Satz: Pierre de Fermat hatte etwa um 1640 die Behauptung aufgestellt, dass es keine solche Zahlen (x, y, z) gibt, wenn $n > 2$ ist. Er behauptete zwar, dass er einen Beweis gefunden habe, hat aber später nur für $n = 4$ einen Beweis erbringen können.

Leonhard Euler konnte 100 Jahre später mit Hilfe komplexer Zahlen die Unmöglichkeit von Gleichung (5) für $n = 3$ beweisen. Auch in den nachfolgenden Jahrhunderten konnten Beweise immer nur für bestimmte Zahlen n bzw. Zahlengruppen (z.B. bestimmte Primzahltypen) gefunden werden.

Erst 1994 konnte von Andrew Wiles, mit späterer Zusammenarbeit mit Richard Taylor, die Ungültigkeit für $n > 2$ nach 8 Jahren Arbeit allgemein bewiesen werden. Dieser Beweis, bei dem die sogenannte Taniyama-Shimura-Vermutung für semi-stabile elliptische Kurven bewiesen wird (was auch immer das ist), ist aber nur für ausgesprochene Experten nachvollziehbar. Aus der Taniyama-Shimura-Vermutung folgt dann (nach einer Idee von Gerhard Frey und Ken Ribet) die Unmöglichkeit von Gleichung (5) für $n > 2$.

MacTeX 2020/pdflatex → https://www.sarahandrobin.com/ingo/pythagoreische-tripel.pdf,
https://www.sarahandrobin.com/ingo/index.html