Berechnung von π

Ingolf Giese

August 2018/September 2021

Die älteste und wichtigste mathematische Konstante ist π, und sie ist neben den Wurzeln die einzige mathematische Konstante, die geometrisch definiert ist. Sie ist definiert als das Verhältnis des Umfangs eines Kreises zu seinem Durchmesser bzw. als die Fläche des Einheitskreises. Dabei muss auch gezeigt werden, dass dies in beiden Fällen die gleiche Konstante ist. Die Quadratwurzel aus 2 ist definiert als Diagonale des Einheitsquadrates, die Quadratwurzel aus 3 als Raumdiagonale im Einheitswürfel.

Die Bestimmung des numerischen Wertes von π (3.1415926535...) ist schwieriger als die der meisten anderen Konstanten wie die der Eulerschen Zahl e (2.7182818284...) oder der Euler-Mascheroni-Konstanten γ (0.5772156649...). Für die Brunsche Konstante B_2 (1.90216058...) als Summe der Kehrwerte aller Primzahlzwillinge gibt es keine Formel, sie kann nur durch Zählung der ersten bekannten Primzahlzwillinge geschätzt werden.

Im Folgenden werden von Tausenden verschiedener Verfahren einige beschrieben und beurteilt, die auch zur Berechnung von π geeignet sind. Sie wurden auf einem 2014er MacBook Pro mit der Interpreter- und Web-Skriptsprache php inklusive bcmath – dem Rechnen mit "beliebiger" Genauigkeit – gerechnet. Dabei wurde π sowohl auf 1396 Stellen als auch auf 5585 Stellen berechnet; diese zufällig aussehenden Zahlen werden bei den höher konvergierenden Methoden erreicht und wurden deshalb in allen beschriebenen Verfahren benutzt, um eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu erreichen.

A. Älteste Methoden

Die früheste bekannte Aufzeichnung stammt von dem ägyptischen Schreiber Ahmes, der etwa um 1650 v. Chr. auf dem Papyrus Rhind einen Wert für π beschrieben hat: Die Kreisfläche ($\pi \cdot d^2/4$) ist gleich einem Quadrat aus 8/9 des Kreisdurchmessers. Das heißt also (mit der altägyptischen Schreibweise mit Stammbrüchen):

$$\pi = 4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3 + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = \frac{256}{81} = 3.160494\ldots$$

Dies ist für diese Zeit ein sehr guter Wert, der aber kaum benutzt wurde. Der Näherungswert 3.0 war in der Handhabung einfacher...

Erst die vorchristlichen Griechen beschäftigten sich wieder mit der Berechnung des Wertes von π, auch weil sie dessen Bedeutung besser verstehen wollten. Etwa 430 v. Chr. erfanden Antiphon das Exhaustionsprinzip (Ausschöpfungsprinzip) und Bryson aus Heraklea die Methode, dabei einbeschriebene und umbeschriebene Vielecke zu benutzen: Verdoppelt man die Anzahl der Seiten eines regelmäßigen Vielecks (mit allen Eckpunkten auf dem Kreis) immer und immer wieder, gelangt man zu einem Vieleck mit so vielen Ecken, dass es fast ein Kreis ist. Aus der Summe der Flächen der vielen kleinen Dreiecke konnten sie auf den Flächeninhalt schließen.

Um 250 v. Chr. benutzte Archimedes von Syrakus diese Methode, berechnete aber über die Vielecke den Umfang des Kreises. Dabei verdoppelte er die Anzahl der Seiten eines Sechsecks vier Mal und erhielt Werte für das einbeschriebene und das umbeschriebene $6 \cdot 2^4$-Eck, also 96-Eck. Sein Ergebnis war eine Abschätzung nach unten und oben mit:

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7} \qquad \text{also} \qquad 3.140845\ldots < \pi < 3.142857\ldots$$

Daraus ergibt sich ist als Mittelwert $3.141851\ldots$ bzw., wenn man den Mittelwert im Verhältnis 2:1 rechnet, da die einbeschriebenen Vielecke immer näher am Kreis liegen als die umbeschriebenen Vielecke, dann $3.141516\ldots$. Das ist mit fast 4 Stellen ein guter Wert, insbesondere, wenn man berücksichtigt, dass zu dieser Zeit nur mit Brüchen gerechnet werden konnte, da die Null und die Rechnung mit Dezimalzahlen (in Europa) erst um 1200 n. Chr. eingeführt wurden.

In den Jahrhunderten nach Archimedes wurden ähnliche Rechnungen ausgeführt, aber keine wesentlichen Verbesserungen gefunden. Die sowieso nicht an Wissenschaft interessierten Römer benutzten die schlechtere Näherung $3\,\frac{1}{8}$ statt $3\,\frac{1}{7}$, weil sie damit einfacher rechnen konnten.

In China fand Ch'ang Hong etwa 120 n. Chr. den nicht sehr guten (aber häufig benutzten, weil elegant aussehenden) Wert $\sqrt{10}$. Um 260 n. Chr. entdeckte Liu Hui ebenfalls die Exhaustionsmethode und berechnete π aus einem $6 \cdot 2^9$-Eck, d.h. 3072-Eck zu $3.141592\ldots$. Weiter gehend fanden etwa im Jahr 450 die beiden Chinesen Tsu Ch'ung Chi und sein Sohn Tsu Keng Chi mit einem $6 \cdot 2^{12}$-Eck, d.h. 24576-Eck π auf 7 Stellen und daraus den als Bruch lange gebräuchlichen Näherungswert:

$$\frac{355}{113} = 3.14159292\ldots$$

Das sind schon 6 bzw. 7 Stellen! Diese Genauigkeit blieb 1100 Jahre lang unübertroffen. Die Chinesen hatten dabei den Vorteil, die Dezimalschreibweise benutzen zu können.

Um 1400 fand der indische Mathematiker Madhava aus Sangamagrama als erster eine unendliche Reihe für die arctan-Funktion, mit der er π auf 11 Stellen berechnen konnte.

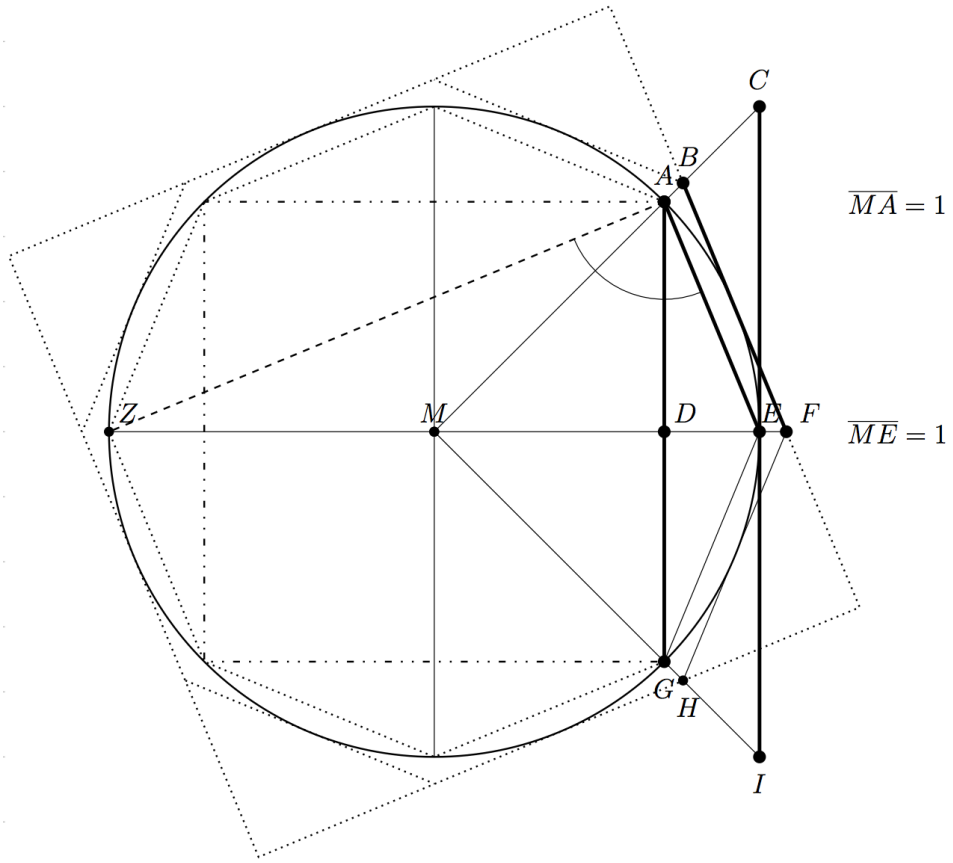
In Europa ging ab dem 2. Jahrtausend das finstere Mittelalter allmählich zu Ende – nach dem Zusammenbruch des Römischen Reiches und dem Machtgewinn der katholischen Kirche, die die Wissenschaft durch religiöse Intoleranz bremste. So konnte auch die Wissenschaft wieder Fuß fassen, insbesondere durch die Schriften, die aus dem arabischen und indischen Raum stammten. Gegen 1200 n. Chr. gelangten die Werke von Euklid,

Ptolemäus und al-Chwarizmi mit den arabischen Ziffern und den Dezimalzahlen nach Westeuropa (unter anderen durch Leonardo von Pisa/Fibonacci).

Erst um 1580 konnte François Viète (Vieta) mit 10 Stellen einen besseren Wert für π durch die Exhaustionsmethode mit einem $6 \cdot 2^{16}$-Eck, d.h. 393216 Seiten großen Vieleck bestimmen. Um 1590 gelang es Adriaan van Roomen mit einem $6 \cdot 2^{24}$-Eck, d.h. 100663296-Eck π auf 15 Stellen zu berechnen. Von 1580 bis zum Jahr 1610 verbrachte Ludolph van Ceulen einen großen Teil seines Lebens damit, π auf zuerst 20, später 35 Stellen über ein 2^{62}-Eck zu berechnen (das rechnen Computer heute in 0.01 Sekunden).

Das war der letzte auf diese Weise berechnete Wert, da mit dem Beginn der Erfindung der Reihenentwicklungen trigonometrischer Funktionen (um 1660) und der Erfindung der Infinitesimalrechnung (um 1685) ganz neue Methoden möglich wurden.

Herleitung einiger Exhaustionsmethoden



Wichtige Strecken für die Exhaustionsmethode sind in dieser Darstellung (mit einem Quadrat als Ausgangsvieleck, wobei dessen Eigenschaften keinen Einfluss auf die Formeln haben) fett dargestellt:

$\overline{AG}$	$=$	s_1:	Die Seite des einbeschriebenen Vielecks
$\overline{CI}$	$=$	t_1:	Die Seite des umbeschriebenen gleichartigen Vielecks (gedreht)
$\overline{AE}$	$=$	s_2:	Die Seite des einbeschriebenen Vielecks mit doppelt so vielen Seiten
$\overline{BF}$	$=$	t_2:	Die Seite des umbeschriebenen Vielecks mit doppelt so vielen Seiten

Nach dem aus der Elementargeometrie schon den Griechen bekanntem 1. und 2. Strahlensatz gilt:

$$\overline{MA} : \overline{MC} = \overline{MD} : \overline{ME} \qquad \text{und} \qquad \overline{MA} : \overline{MC} = \overline{AG} : \overline{CI}$$

Da $\overline{ME}$ gleich dem Radius des Einheitskreises – also 1 – ist, folgt insgesamt:

$$\overline{MD} : \overline{ME} = \overline{AG} : \overline{CI} \qquad \text{und somit} \qquad \overline{MD} = s_1 : t_1$$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt im Dreieck MDA:

$$\overline{MD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{MA}^2 = 1$$

Wegen $\overline{DA} = \overline{AG}/2 = s_1/2$ folgt daraus

$$\overline{MD}^2 = 1 - \left(\frac{s_1}{2}\right)^2$$

Aus dem Gleichsetzen von $\overline{MD}$ mit dem Ergebnis der Strahlensätze ($\overline{MD} = s_1 : t_1$) folgt für die Länge der umbeschriebenen Seite:

$$(1) \qquad t_1 = \frac{s_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{s_1}{2}\right)^2}} = \frac{2s_1}{\sqrt{4 - s_1^2}}$$

Nach dem Satz des Thales ist im Halbkreis über $\overline{ZE}$ bei A ein rechter Winkel. Daher folgt aus dem Kathetensatz im Dreieck ZEA wegen $\overline{ZE} = 2$:

$$\overline{DE} \cdot \overline{ZE} = \overline{AE}^2 \qquad \text{also} \qquad 2 \cdot \overline{DE} = s_2^2$$

Setzt man dort $\overline{DE} = \overline{ME} - \overline{MD}$ mit $\overline{ME} = 1$ ein, folgt:

$$s_2^2 = 2 \cdot (1 - \overline{MD}) = 2 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{s_1}{2}\right)^2}\right) = 2 - \sqrt{4 - s_1^2}$$

Zusammengefasst folgt damit für die neue einbeschriebene Seite:

$$(2) \qquad s_2 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_1^2}}$$

Für die neue umbeschriebene Seite t_2 gilt die analoge Beziehung wie Gleichung (1):

$$(3) \qquad t_2 = \frac{s_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{s_2}{2}\right)^2}} = \frac{2s_2}{\sqrt{4 - s_2^2}}$$

Damit hat man alle Beziehungen, um den Kreisumfang über Vielecke anzunähern.

$2 \cdot 2^N$-Ecke

Man beginnt nun mit einem Viereck ($N = 1$).
Da nach dem Satz des Pythagoras im Dreieck MDA: $\overline{AD} = s_1/2 = 1/2 \cdot \sqrt{2}$ ist, folgt $s_1 = \sqrt{2}$. Dann folgt aus den Gleichungen (1) bis (3):

$$t_1 = 2$$

$$s_2 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$t_2 = \frac{2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \frac{2s_2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

Und somit allgemein für ein $2 \cdot 2^N$-Eck, was mit W_N kürzer darstellbar ist:

$$(4) \qquad s_N = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} = \sqrt{2 - W_{N-1}}$$

$$(5) \qquad t_N = \frac{2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2 - W_{N-1}}}{W_N} = \frac{2s_N}{W_N}$$

Wobei die "Kettenwurzel" W_N genau N Wurzelzeichen hat:

$$(6) \qquad W_N = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

P.S: Den Begriff "Kettenwurzel" findet man auch schon beim Goldenen Schnitt:

$$\Phi_N = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}} \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1.6180339887\ldots$$

Aus den Gleichungen (4) und (5) folgen dann direkt die Näherungswerte für π, da der Umfang des Einheitskreises, also 2π, mit $2 \cdot 2^N \cdot s_N$ bzw. $2 \cdot 2^N \cdot t_N$ schrittweise immer genauer durch die Folgen von Vielecken mit jeweils $2 \cdot 2^N$ Seiten des einbeschriebenen Vielecks bzw. des umbeschriebenen Vielecks angenähert wird:

$$(7) \qquad \pi = 2^N \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} = 2^N \cdot \sqrt{2 - W_{N-1}}$$

$$(8) \qquad \pi = 2^N \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}} = 2^N \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{2 - W_{N-1}}}{W_N}$$

Gleichung (7) ist die wohl "schönste" Näherungsformel für π, weil sie die Zahl π nur durch die Basiszahl 2 ausdrückt!

Die Ergebnisse der Rechnungen mit Formel (7) mit einbeschriebenen Vielecken mit $2 \cdot 2^N$-Ecken sind (wobei bcscale aus bcmath die Rechengenauigkeit angibt und Auslöschung bei Gleichung (6) die Anzahl am Anfang auftretenden "unbenutzbaren" 9en zeigt):

Stellenzahl	N	Auslöschung	bcscale	Zeit
1396	2319	1395	2795	190 sec
5585	9277	5584	11175	9235 sec

Einzelrechnungen mit umbeschriebenen Vielecken lohnen sich nicht, da diese etwas aufwendiger sind. Einen besseren Wert für π bekommt man aber aus der Erkenntnis, dass das einbeschriebene Vieleck immer enger am Kreis liegt als das umbeschriebene Vieleck. Daher kann man den gewichteten Mittelwert im Verhältnis 2 zu 1 benutzen und erhält:

$$\pi = \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot 2^N \cdot \sqrt{2 - W_{N-1}} + 2^N \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{2 - W_{N-1}}}{W_N} \right)$$

$$(9) \qquad = \frac{1}{3} \cdot 2^{N+1} \cdot \sqrt{2 - W_{N-1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{W_N} \right)$$

Die recht guten Ergebnisse der Rechnungen mit der Mittelwert-Formel (9) sind:

Stellenzahl	N	Auslöschung	bcscale	Zeit
1396	1160	697	2095	46 sec
5585	4637	2791	8380	3490 sec

$3 \cdot 2^N$- bzw. $6 \cdot 2^{N-1}$-Ecke

Beginnt man mit einem Sechseck ($N = 1$), so ist $s_1 = 1$. Dann erhält man aus den Gleichungen (1) bis (3) folgende Größen für die gesuchten Seiten:

$$t_1 = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$
$$s_2 = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$
$$t_2 = \frac{2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{2s_2}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

Und somit allgemein für ein $3 \cdot 2^N$-Eck mit der Kettenwurzel X_N:

$$(10) \quad s_N = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} = \sqrt{2 - X_{N-1}}$$

$$(11) \quad t_N = \frac{2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2 - X_{N-1}}}{X_N} = \frac{2s_N}{X_N}$$

Wobei hier die Kettenwurzel X_N ebenfalls N Wurzelzeichen hat, die innerste Zahl aber 3 statt 2 ist:

$$(12) \quad X_N = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

Diese Kettenwurzel strebt genauso gegen 2 wie die unter Gleichung (6), aber etwas schneller - bei der Zahl 4 statt der innersten 2 bzw. 3 wäre der "Grenzwert" direkt 2.

Aus den Gleichungen (10) und (11) folgen dann wieder direkt die Näherungswerte für π, da der Umfang des Einheitskreises, also 2π, mit $3 \cdot 2^N \cdot s_N$ bzw. $3 \cdot 2^N \cdot t_N$ immer genauer durch die Folgen von Vielecken mit jeweils $3 \cdot 2^N$ Seiten des einbeschriebenen Vielecks bzw. des umbeschriebenen Vielecks angenähert wird:

$$(13) \quad \pi = 3 \cdot 2^{N-1} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} = 3 \cdot 2^{N-1} \cdot \sqrt{2 - X_{N-1}}$$

$$(14) \quad \pi = 3 \cdot 2^{N-1} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}} = 3 \cdot 2^{N-1} \cdot \frac{2\sqrt{2 - X_{N-1}}}{X_N}$$

Die Ergebnisse der Rechnungen mit der Formel (13) mit einbeschriebenen Vielecken mit $3 \cdot 2^N$-Ecken sind aber vergleichbar mit denen bei $2 \cdot 2^N$-Ecken:

Stellenzahl	N	Auslöschung	bcscale	Zeit
1396	2318	1395	2795	189 sec
5585	9277	5584	11175	9235 sec

Einen besseren Wert für π bekommt man ebenfalls wieder mit dem Mittelwert im 2:1-Anteil aus beiden Gleichungen (13) und (14):

$$\pi = \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot 3 \cdot 2^{N-1} \cdot \sqrt{2 - X_{N-1}} + 3 \cdot 2^{N-1} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{2 - X_{N-1}}}{X_N} \right)$$

$$= 2^N \cdot \sqrt{2 - X_{N-1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{X_N} \right) \tag{15}$$

Die Ergebnisse beider Rechnungen sind analog (nur winzig besser) denen der $2 \cdot 2^N$-Ecken:

Stellenzahl	N	Auslöschung	bcscale	Zeit
1396	1159	697	2095	46 sec
5585	4637	2791	8380	3490 sec

Die Benutzung von Formeln zur Flächenberechnung über N-Ecke oder Streifen in der Kreisfläche zeigen ebenso wenig unterschiedliche Ergebnisse, auch im Rechenaufwand.

Und die Produktformel, die John Wallis 1655 (über Flächenberechnung des Kreises) fand, ist zwar interessant, bietet aber keine rechentechnischen Vorteile: für 14 Stellen von π muss man schon 10 Millionen Multiplikationen und Divisionen (in etwa 20 sec) ausführen – also genauso langsam wie bei der (nachfolgenden) Gregory-Leibniz-Reihe.

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \ldots}$$

B. arctan-Methoden

Die arctan(1)-Reihe

Der Zusammenhang von π und der Reihenentwicklung von arctan war zwar schon dem indischen Mathematiker Madhava um 1400 bekannt, wurde aber erst 1671 von James Gregory und – unabhängig von ihm – 1676 von Gottfried Wilhelm Leibniz wiederentdeckt. Da der $\tan(\pi/4) = 1$ ist, folgt daraus mit der Umkehrfunktion arctan:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \pm \ldots \tag{16}$$

Diese Gleichung ist aber zur Berechnung von π äußerst ungeeignet: für 5 Stellen müssen 1 Million Summanden berechnet werden, was etwa 2.7 Sekunden auf dem benutzten Rechner benötigte. In dieser Zeit konnten mit der Mittelwert-Formel (15) 485 Stellen berechnet werden!

Da die Reihe alternierend ist, ist eine einfache Mittelwertbildung hilfreich: Man berechnet die Summe mit n und dann mit $n+1$ Summanden und bildet das arithmetische Mittel beider Summen. Damit erhält man bei $n = 1000000$ in der gleichen Rechenzeit schon 12 Stellen. Allgemein erhält man bei 10^N Summanden $N-1$ bzw. (mit der Mittelwert-Bildung) $2N$ Stellen.

Verallgemeinert man die Mittelwert-Idee, erhält man mit der sogenannten Eulerschen Reihentransformation eine schneller konvergierende Reihe:

$$\begin{aligned}(17)\quad \frac{\pi}{4} &= \frac{1}{2}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2k+1)}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k\cdot k!^2}{(2k+1)!}\\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\ldots\right)\end{aligned}$$

Die Idee dieser von Nicolas Fatio (um 1700) erdachten Transformation ist, durch Zusammenfassen zweier aufeinanderfolgender Summanden der Reihe S_a eine neue Reihe S_b zu definieren:

$$\begin{aligned}S_a &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k+a_{k+1}}{2} =: \frac{a_0}{2}+S_b\\ S_b &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k+a_{k+1}}{2} =: \sum_{k=0}^{\infty} b_k\end{aligned}$$

Dieses Vorgehen wendet man wiederholt an:

$$\begin{aligned}S_b &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \frac{b_0}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k+b_{k+1}}{2} =: \frac{b_0}{2}+S_c\\ S_c &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k+b_{k+1}}{2} =: \sum_{k=0}^{\infty} c_k \qquad \text{u.s.w.}\end{aligned}$$

und erhält am Ende die Eulersche Transformierte (17).

Die damit durchgeführten Rechnungen ergaben stark verbesserte Zeiten:

Stellenzahl	N	bcscale	Zeit
1396	4634	1420	43.8 sec
5585	18550	5680	3290 sec

Diese Werte sind vergleichbar mit den Ergebnissen der Mittelwert-Formeln mit einbeschriebenen und umbeschriebenen N-Ecken.

Zerlegung der arctan-Funktion

Die Reihenentwicklung von arctan folgt aus dem Integral nach Umformung mit der geometrischen Reihe:

$$\begin{aligned}\arctan(z) &= \int_0^z \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^z (1-t^2+t^4-t^6\pm\ldots)\,dt = \left[t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}\pm\ldots\right]_0^z\\ &= z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}\pm\ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{2k+1}\end{aligned}$$

Für die Berechnung von π ist besonders $z = 1/n$ interessant (mit n ganzzahlig), weil dann der Zähler immer 1 ist, also:

$$(18)\quad \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)n^{2k+1}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{5n^5} - \frac{1}{7n^7} \pm \ldots$$

Wenn n relativ groß ist, konvergiert die Reihe sehr schnell.

Betrachtet man zusätzlich die aus der Trigonometrie bekannte Beziehung (mit der Bedingung $|ab| < 1$):

$$\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$$

folgt mit den Argumenten der Form $1/x$ und $1/y$ (x und y ganzzahlig, damit also immer erfülltem $|xy| > 1$):

$$(19)\quad \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{1}{y}\right) = \arctan\left(\frac{x+y}{xy-1}\right)$$

Daraus folgt sofort für $x = 2$ und $y = 3$ (was auch Leonhard Euler um 1740 fand):

$$(20)\quad \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \arctan\left(\frac{5}{6-1}\right) = \arctan(1)$$

Eine Berechnung von π aus dieser Gleichung wegen $\arctan(1) = \pi/4$ liefert folgende Ergebnisse (mit N1 und N2 als Anzahl der Summanden beider Summen):

Stellenzahl	N1	N2	bcscale	Zeit
1396	2314	1460	1400	4.00 sec
5585	9270	5849	5589	230 sec

Das sind zum ersten Mal wesentlich bessere Werte (Faktor 10 und mehr) als bei allen bisher vorgestellten Verfahren.

Daher ist es interessant, weitere Verbesserungen zu suchen. Eine Methode ist, den Ausdruck $(x+y)/(xy-1) = 1/n$ (mit n ganzzahlig) zu setzen. Daraus folgt direkt:

$$xn + yn = xy - 1 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1+xn}{x-n}$$

Mit der Differenz $x - n = 1$, z.B. bei $n = 2$ und $x = 3$, hat man wieder ein ganzzahliges Ergebnis, hier also $y = (1+xn)(x-n) = 7$:

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$$

Setzt man dies in Gleichung (20) ein, folgt:

$$(21)\quad \arctan(1) = 2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$$

Eine Berechnung von π aus dieser Gleichung liefert schon etwa 40 % bessere Werte:

Stellenzahl	N1	N2	bcscale	Zeit
1396	1460	824	1400	2.42 sec
5585	5849	3302	5589	140 sec

Schreibt man ein kleines Programm, das alle y-Werte für die Fälle mit $n \leq 100$ und $|x| \leq 100$ ermittelt, erhält man schon etwa 500 Lösungen, darunter z.B.:

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{1}{3}\right) &= \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) \\ \arctan\left(\frac{1}{7}\right) &= \arctan\left(\frac{1}{8}\right) + \arctan\left(\frac{1}{57}\right) \\ \arctan\left(\frac{1}{12}\right) &= \arctan\left(\frac{1}{17}\right) + \arctan\left(\frac{1}{41}\right) \end{aligned} \tag{22}$$

Eine weiter gehende Idee ist, nach Lösungen von arctan-Summen mit verschiedenen Vorfaktoren ($f_1 > 0$ und $f_2 < f_1$) zu suchen, also

$$\arctan\left(\frac{1}{n}\right) = f_1 \cdot \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + f_2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{y}\right)$$

So erhält man aus Gleichung (19) mit $x = y$ bei $f_1 = 2$ und damit $f_2 = 1$:

$$2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)$$

Und dies wieder in Gleichung (19) eingesetzt führt nach Erweitern mit $2x$ zu:

$$2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{1}{y}\right) = \arctan\left(\frac{x^2-1+2xy}{(x^2-1)y-2x}\right)$$

Setzt man den rechten Ausdruck in Klammern wieder mit $1/n$ gleich, folgt:

$$n(x^2-1+2xy) = x^2y - y - 2x \quad \rightarrow \quad y = \frac{n(x^2-1)+2x}{(x^2-1)-2nx}$$

Ein Programm, bei dem wieder n und x vorgegeben wird, liefert etwa 60 ganzzahlige Lösungen für y (wieder bei $n \leq 100$ und $|x| \leq 100$ und der nun geltenden Voraussetzung $|y| > |2x/(x^2-1)|$, z.B.:

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{1}{5}\right) &= 2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{10}\right) - \arctan\left(\frac{1}{515}\right) \\ \arctan\left(\frac{1}{7}\right) &= 2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{17}\right) + \arctan\left(\frac{1}{41}\right) \\ \arctan\left(\frac{1}{41}\right) &= 2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{99}\right) + \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \\ \arctan\left(\frac{1}{n}\right) &= 2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{2n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{4n^3+3n}\right) \end{aligned} \tag{23}$$

Die letzte Beziehung gilt allgemein, da bei $x = 2n$ der Nenner von y immer -1 ist. Alle anderen Fälle ($x \neq 2n$) sind wesentlich seltener (< 0.4 %).

Wendet man die gleiche Idee noch einmal an, findet man:

$$4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan\left(\frac{4x^3 - 4x}{x^4 - 6x^2 + 1}\right)$$

Daraus folgt analog oben nach Erweiterung um $4x^3 - 4x$:

$$4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{1}{y}\right) = \arctan\left(\frac{(x^4 - 6x^2 + 1) + y(4x^3 - 4x)}{(x^4 - 6x^2 + 1)y - (4x^3 - 4x)}\right)$$

Durch Gleichsetzen des rechten Terms von arctan mit $1/n$ erhält man:

$$n(x^4 - 6x^2 + 1) + ny(4x^3 - 4x) = y(x^4 - 6x^2 + 1) - (4x^3 - 4x)$$

Daraus folgt eine Formel, mit der man brauchbare Werte für y finden kann:

$$y = \frac{n(x^4 - 6x^2 + 1) + (4x^3 - 4x)}{(x^4 - 6x^2 + 1) - n(4x^3 - 4x)}$$

Untersucht man alle möglichen Fälle, findet man nur eine einzige ganzzahlige Lösung:

$$\text{(24)} \quad \arctan(1) = 4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

Und diese ist bedeutend: Damit hat 1706 John Machin π auf 100 Stellen berechnet. Dafür musste er 70 Summanden des ersten Terms und 21 Summanden des zweiten Terms (von Hand) berechnen - auf heutigen Computern braucht man dazu etwa 0.001 sec. William Shanks hat 1853 damit 607 Stellen berechnet. Aber nach der 527. Stelle war ein Fehler; das hat erst 1945 D. F. Ferguson mit Hilfe einer Tischrechenmaschine nachgewiesen!

Für die Rechnungen von Formel (24) mit 1396 bzw. 5585 Stellen ergaben sich:

Stellenzahl	N1	N2	bcscale	Zeit
1396	996	293	1400	1.37 sec
5585	3992	1173	5589	79.0 sec

Man wundert sich, dass John Machin die einfache Umwandlung mit Gleichung (23) nicht gesehen hat, denn damit kann der erste Summand mit dem Wert 1/10 gerade von Hand einfacher berechnet werden. Setzt man diese Beziehung in Gleichung (24), folgt direkt:

$$\text{(25)} \quad \arctan(1) = 8 \cdot \arctan\left(\frac{1}{10}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) - 4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{515}\right)$$

Bei Computer-Rechnungen spielt allerdings der einfache Nenner 10 keine Rolle, trotzdem sind die Rechnungen mit Formel (25) etwas schneller als mit (24):

Stellenzahl	N1	N2	N3	bcscale	Zeit
1396	696	293	257	1400	1.20 sec
5585	2790	1173	1029	5589	71.2 sec

Das liegt daran, dass bei Formel (24) z. B. bei der Stellenzahl 5585 $N1 + N2 = 5166$ Summanden berechnet werden müssen, bei (25) trotz der 3 Summen aber nur $N1 + N2 + N3 = 4992$. Das ist allgemein das Problem, wenn man eine noch schneller rechnende Formel sucht: Die Gesamtzahl der Summanden sollte dann unter 5000 liegen.

PS: Die Formel (25) wurde 1971 vom Autor auf einer Rechenmaschine Siemens 2002 (Jahrgang 1960) benutzt, um π auf 70968 Stellen zu berechnen – das dauerte 16 Tage und 2 Stunden! Mehr als diese Stellenzahl war nicht möglich: Der Rechner hatte nur 10000 Wörter Speicherplatz (à 12 Dezimalstellen), und darin musste auch das Programm (im Maschinencode) und der Zwischenspeicher untergebracht werden.

Diese Formel wurde auch 1981 von Kazunori Miyoshi und Kazuhika Nakayama benutzt, um 2 Millionen Stellen von π zu berechnen.

Die Idee der Vorfaktoren wurde von Frederik Carl Mülertz Størmer um etwa 1890 wesentlich weiterentwickelt: Er untersuchte die allgemeine Gleichung mit ganzzahligen Linearkombinationen von $\arctan(1/k)$ der Form:

$$\text{(26)} \quad \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} f_k \cdot \arctan\left(\frac{1}{k}\right)$$

und fand zum Beispiel die folgenden Zerlegungen:

$$\text{(27)} \quad \begin{aligned} \arctan\left(\frac{1}{57}\right) &= -2 \cdot \arctan(1) + 3 \cdot \arctan\left(\frac{1}{515}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) \\ \arctan\left(\frac{1}{682}\right) &= -\arctan(1) + 3 \cdot \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{11}\right) \\ \arctan\left(\frac{1}{12943}\right) &= 3 \cdot \arctan(1) - 4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{2}\right) - 3 \cdot \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{11}\right) \end{aligned}$$

Solche Zerlegungen sind genau dann möglich, wenn n keine "Størmer-Zahl" ist. Dabei definierte er Størmer-Zahlen als die ganzen Zahlen n, für die es eine Primzahl $p \geq 2n$ gibt mit der Bedingung, dass p ein Teiler von $n^2 + 1$ ist. Zum Beispiel ist 57 keine Størmer-Zahl, da der größte Primfaktor von $57^2 + 1$ die Zahl 13 ist, die aber kleiner als $2 \cdot 57$ ist. 26 ist eine Størmer-Zahl, denn $26^2 + 1$ ist 677, und das ist direkt eine Primzahl, die auch größer als $2 \cdot 26$ ist.

Mit solchen Beziehungen entwickelte er 1896 die sehr gute Formel:

$$\text{(28)} \quad \begin{aligned} \arctan(1) = 44 \cdot \arctan\left(\frac{1}{57}\right) &+ 7 \cdot \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \\ - 12 \cdot \arctan\left(\frac{1}{682}\right) &+ 24 \cdot \arctan\left(\frac{1}{12943}\right) \end{aligned}$$

Dabei ist die Summe mit $N1 + N2 + N3 + N4 = 4426$ (bei 5585 Stellen) relativ klein und somit ist Størmers Gleichung trotz der vier Terme die bisher am schnellsten rechnende:

Stellenzahl	N1	N2	N3	N4	bcscale	Zeit
1396	397	293	246	170	1400	1.17 sec
5585	1589	1173	985	679	5589	67.5 sec
11176	3181	2348	1971	1358	11180	525 sec
22354	6364	4699	3943	2718	22359	4090 sec

Yasumasa Kanada berechnete mit dieser Formel 2002 π auf über 1.2 Billionen Stellen in etwa 600 Stunden Rechenzeit inklusive Verifikation, bei 4 Jahren Vorbereitung mit 10 Personen und fast 80000 Zeilen für das (Fortran-)Programm.

Es ist unwahrscheinlich, dass es noch bessere arctan-Zerlegungen gibt.

C. Neue Methoden

Srinivasa Ramanujan

1914 fand Srinivasa Ramanujan neben vielen anderen Formeln die erstaunliche Formel, die auf Untersuchungen von elliptischen Funktionen und Modulargleichungen (modularen Funktionen) basiert:

$$(29)\quad 1/\pi = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}(4k)!\frac{1103+26390k}{(k!)^4\cdot 396^{4k}}$$

Dabei ist der Quotient $9801/(2\sqrt{2}\cdot 1103) = 3.14159273\ldots$ eine gute Näherung für π. Und $e^{\pi\sqrt{58}}$ ist fast ganzzahlig mit $396^4 - 104.000000177\ldots$.

Formel (29) liefert pro Summand 8 Stellen von π und ist damit schneller als alle arctan-Verfahren. Die nun folgenden Tabellen zeigen auch Rechnungen mit weiteren Stellenzahlen (wegen der folgenden höher konvergenten Methoden):

Stellenzahl	N	bcscale	Zeit
1396	174	1400	0.72 sec
2791	349	2795	5.85 sec
5585	699	5589	48.6 sec
11176	1400	11180	409 sec
22354	2800	22358	3460 sec
44701	5600	44705	29940 sec

William Gosper berechnete 1985 mit Ramanujans Formel π auf 17 Millionen Stellen.

David und Gregory Chudnovsky

Die Brüder David und Gregory Chudnovsky entwickelten 1987 eine ähnliche Formel, die π als hypergeometrische Reihe angibt ähnlich denen von Ramanujan:

$$(30)\quad 1/\pi = \frac{\sqrt{10005}}{4270934400}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(6k)!}{(k!)^3\cdot(3k)!}\cdot\frac{13591409+545140134k}{640320^{3k}}$$

PS: Mit Ramanujans Konstante $e^{\pi\sqrt{163}}$ fast ganzzahlig folgt $\ln(640320^3+744)/\sqrt{163} \simeq \pi$ mit 30 Stellen Genauigkeit!

Diese neue Formel (30) liefert pro Summand 14 Stellen von π und ist damit etwa doppelt so schnell wie Formel (29), benötigt aber (wegen Auslöschung) eine etwas höhere Rechengenauigkeit (knapp 23 % mehr bei bcscale):

Stellenzahl	N	bcscale	Zeit
1396	98	1703	0.36 sec
2793	196	3425	2.71 sec
5585	393	6846	22.2 sec
11176	788	13715	184 sec
22354	1576	27445	1530 sec
44701	3152	54890	13070 sec

Mit ihrer Formel berechneten die Chudnovskys – auf eigens dafür selbst entwickelter Hardware – 1989 zuerst etwa 480 Millionen, danach etwa 1 Milliarde Stellen und 1996 sogar 8 Milliarden Stellen von π. Fabrice Bellard berechnete 2010 auf einem Linux-PC damit 2.7 Billionen Stellen.

Eugene Salamin und Richard Brent

Der Salamin/Brent-Algorithmus ist der erste quadratisch konvergierende Algorithmus. Er wurde 1976 unabhängig von Eugene Salamin und Richard Brent entwickelt.

$$\pi = \frac{4 \cdot (\mathrm{agm}(1, \frac{1}{\sqrt{2}}))^2}{1 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{k+1} c_k^2} \tag{31}$$

Dabei ist $\mathrm{agm}(a, b)$ das arithmetisch-geometrische Mittel von a und b mit den Rekursionsformeln (die schon Carl Friedrich Gauß und Adrien-Marie Legendre aus der Untersuchung von bestimmten elliptischen Integralen kannten, aber nicht bemerkten, dass damit π berechenbar sein könnte). Das ist eine Art Mittelwert zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel.

Berechnung von $\mathrm{agm}(1, \frac{1}{\sqrt{2}})$ - Anfangswerte:

$$a_0 = 1$$
$$b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Das arithmetisch-geometrisches Mittel wird dann iterativ (für $k = 1, \ldots, N$) ermittelt durch:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$$
$$b_k = \sqrt{a_{k-1} \cdot b_{k-1}}$$

wobei a_k und b_k gegen den gemeinsamen Grenzwert, das arithmetisch-geometrisches Mittel (agm), streben. Die Größen c_k, die aus der Gleichung der elliptischen Integrale kommen, ergeben sich dann aus der Differenz der Quadrate der a_k und b_k:

$$c_k^2 = a_k^2 - b_k^2$$

bzw. einfacher, wenn man a_k und b_k einsetzt:

$$c_k = \frac{1}{2}(a_{k-1} - b_{k-1})$$

Mit diesem Verfahren erhält man für die Rechnungen sehr gute Werte insbesondere bei hohen Stellenzahlen:

Stellenzahl	N	bcscale	Zeit
1396	10	1401	0.70 sec
2790	11	2795	3.26 sec
5585	12	5590	14.8 sec
11176	13	11182	67.5 sec
22354	14	22360	310 sec
44701	15	44707	1400 sec

Damit wurden 2014 von Houkouonchi (Sandon Van Ness) 13.3 Billionen Stellen (in 208 Tagen Rechenzeit) und 2016 von Peter Trüb 22.4 Billionen Stellen von π berechnet (in 105 Tagen - das ist der aktuelle Rekord).

Jonathan and Peter Borwein

Die Brüder Jonathan und Peter Borwein entwickelten 1987 einen ähnlichen, auch auf Ramanujans Arbeit basierten, aber bi-quadratisch konvergierenden Algorithmus, der schneller als der von Salamin und Brent ist, obwohl dabei 4. Wurzeln – hier realisiert mit $\sqrt[4]{x} = \sqrt{\sqrt{x}}$ – zu berechnen sind.

Anfangswerte:

$$a_0 = 6 - 4\sqrt{2}$$
$$y_0 = \sqrt{2} - 1$$

Iteration für $k = 1, \ldots, N$:

$$y_k = \frac{1 - (1 - y_{k-1}^4)^{1/4}}{1 + (1 - y_{k-1}^4)^{1/4}}$$

$$a_k = a_{k-1}(1 + y_k)^4 - 2^{2k+1} y_k (1 + y_k + y_k^2) \tag{32}$$

π ergibt sich dann aus $1/a_N$. Hiermit wurden die bisher besten Rechenzeiten erreicht; durch das jeweils Vervierfachen der Stellenzahl entstehen aber andere Anzahlen der Nachkommastellen von π (in Klammern gesetzte Werte - nur zum Vergleich - entstanden durch entsprechend verkleinertes bcscale):

Stellenzahl	N	bcscale	Zeit
(1396)	5	1400	0.50 sec
2788	5	2795	2.18 sec
(5585)	6	5590	10.2 sec
11170	6	11175	43.2 sec
(22354)	7	22360	205 sec
44701	7	44720	875 sec
178824	8	178900	17260 sec

Die Brüder Borwein und andere entwickelten auch Verfahren, die bis zu nonisch (9-fach) konvergent sind, aber auch komplizierter zu rechnen sind, insbesondere beim Rechnen mit beliebig großer Genauigkeit.

Mit Peter Borwein und David H. Bailey entwickelte Simon Plouffe die sehr erstaunliche Formel, mit der man die n-te Hexadezimalstelle (das geht nicht für die interessanteren Dezimalstellen!) von π berechnen kann, ohne die vorhergehenden Stellen zu kennen:

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} 16^{-k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right) \tag{33}$$

Dabei muss man einige Umformungen machen, um die n-te Stelle zu berechnen:
Die 4 Ausgangssummanden werden mit 16^n multipliziert und dann gesplittet, hier am Beispiel des ersten Summanden:

$$16^n \sum_{k=0}^{\infty} 16^{-k} \left(\frac{4}{8k+1} \right) = \sum_{k=0}^{n} 16^{n-k} \left(\frac{4}{8k+1} \right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} 16^{n-k} \left(\frac{4}{8k+1} \right)$$

Da nur die erste Teilsumme ganze Zahlen erzeugt (wegen $k \leq n$), kann man dort die Modulo-Funktion benutzen, um diese ignorieren zu können:

$$= 4\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{16^{n-k} \bmod (8k+1)}{8k+1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{16^{n-k}}{8k+1}\right)$$

Jonathan Borwein und Frank Garvan

Jonathan Borwein und Frank Garvan entwickelten durch Kombination zweier vierfach-konvergierenden Algorithmen auch einen 16-fach konvergierenden Algorithmus:

Anfangswerte der drei zu iterierenden Größen α, s und s^* mit $s^4 + s^{*4} = 1$:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{3} \\ s_1 &= \sqrt{2} - 1 \\ s_1^* &= (1 - s_1^4)^{1/4} \end{aligned}$$

Dann muss iteriert werden für $k = 1, \ldots, N$:

$$\begin{aligned} t &= 1 + s_k^* \\ u &= (8s_k^* \cdot (1 + s_k^{*2}))^{1/4} \\ m_1 &= \left(\frac{1+s_k}{t}\right)^4 \\ m_2 &= \frac{1}{t^4} \\ \alpha_k &= 16m_1 \cdot \alpha_{k-1} + \frac{1}{3} \cdot 4^{2k-1}(1 - 12m_2 - 4m_1) \qquad (34) \\ s_{k+1} &= \frac{(1-s_k^*)^4}{(t+u)^2(t^2+u^2)} \qquad (\text{bis } k = N-1) \\ s_{k+1}^* &= (1 - s_{k+1}^4)^{1/4} \qquad (\text{bis } k = N-1) \end{aligned}$$

π ergibt sich dann aus $1/\alpha_N$. Die Anzahl der Stellen geht extrem schnell hoch: von 7 Stellen im ersten Schritt zu 44701 Stellen nach 4 Schritten. Durch das jeweils Versechszehnfachen der Stellenzahl entstehen andere Anzahlen der Nachkommastellen von π:

Stellenzahl	N	bcscale	Zeit
7	1	10	0.0001 sec
170	2	175	0.0055 sec
(1396)	3	1401	0.41 sec
2788	3	2795	1.91 sec
(5585)	4	5591	7.60 sec
(11176)	4	11183	35.1 sec
(22354)	4	22360	170 sec
44701	4	44720	675 sec

Die nächste Stellenzahl bei $N = 5$ wäre dann etwa 715300 (bei etwa 232250 sec = 64.5 Stunden Rechenzeit), bei $N = 7$ erhält man schon fast 200 Millionen Stellen !

mactex-2016/pdflatex → http://www.sarahandrobin.com/ingo/pi-berechnung.pdf, http://www.sarahandrobin.com/ingo/index.html