Mathematische Nomenklatur

Ingolf Giese

April 2018

Um die nachfolgenden Artikel besser verstehen zu können, werden hier die wichtigsten mathematischen Begriffe und Schreibweisen erläutert.

A. Summe

Das Summenzeichen Sigma: Σ

$$\sum_{k=0}^{n} s_k \;=\; s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n$$

Damit wird eine Summe von (hier $n+1$) Summanden beschrieben, deren Indizes k von 0 bis n laufen. Der Bereich der Indizes wird unterhalb (Anfangsbereich) und oberhalb (Endbereich) des Summenzeichens, das große griechische Sigma, geschrieben.

Alternativ ist es auch möglich, nur unterhalb des Summenzeichens einen Bereich und/oder Eigenschaften anzugeben, z.B. mit allen geraden Indizes k zwischen 0 und n:

$$\sum_{\substack{0 \le k \le n \\ k \,=\, \text{gerade}}} s_k \;=\; s_0 + s_2 + s_4 + s_6 + \ldots + s_{2 \cdot floor(n/2)}$$

B. Produkt

Das Produktzeichen Pi: Π

$$\prod_{k=1}^{n} p_k \;=\; p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot \ldots \cdot p_n$$

Damit wird ein Produkt von (hier n) Faktoren beschrieben, deren Indizes k von 1 bis n laufen. Der Bereich der Indizes wird unterhalb (Anfangsbereich) und oberhalb (Endbereich) des Produktzeichens, das große griechische Pi, geschrieben.

Alternativ ist auch möglich, nur unterhalb des Produktzeichens einen Bereich und/oder Eigenschaften anzugeben, z.B. mit allen Primzahlen p_k bis zur letzten Primzahl (p_z) kleiner oder gleich der Zahl x:

$$\prod_{p_k \text{ prim, } p_k \leq x} p_k = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot \ldots \cdot p_z$$

C. Ableitungen (Differentation)

Die Ableitung von Funktionen einer oder mehrerer Veränderlichen

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

Bei einer Funktion einer Veränderlichen (hier x) ist die Ableitung (Differentation) gleich dem Grenzwert des Quotienten aus dem Zuwachs bei $f(x)$ und dem entsprechenden Zuwachs bei x.

Partielle Ableitung:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,t) = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x+dx,t) - f(x,t)}{dx}$$

Bei einer Funktion von zwei (oder mehr) Veränderlichen (hier x und t) wird ein geschwungenes d (also ∂) benutzt, um anzuzeigen, bei welcher der Veränderlichen der Zuwachs zum Grenzwert berechnet wird, während die andere(n) Veränderliche(n) festgehalten werden.

Einige häufig benutzte Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} x^n &= n \cdot x^{n-1} \\
\frac{d}{dx} \sin(x) &= \cos(x) \\
\frac{d}{dx} \cos(x) &= -\sin(x) \\
\frac{d}{dx} e^x &= e^x \\
\frac{d}{dx} ln(x) &= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Bei zusammengesetzten Funktionen ($f(u)$ mit $u(x)$) wird die Kettenregel benutzt, um die Ableitung zu bestimmen:

$$\frac{d}{dx} f(u(x)) = \frac{d}{du} f(u) \cdot \frac{d}{dx} u(x)$$

D. Integration

Die unbestimmte und bestimmte Integration

Unbestimmtes Integral:

$$\int f(x)\ dx \ = \ F(x)$$

Das unbestimmte Integral einer Funktion $f(x)$ ist die Stammfunktion $F(x)$. Die Integration ist die Umkehrung der Differentation (Ableitung), also gilt:

$$\frac{d}{dx}F(x) \ = \ f(x)$$

Genauer gilt mit einer beliebigen Konstanten C:

$$\int f(x)\ dx \ = \ F(x) + C$$

Bestimmtes Integral:

$$\int_a^b f(x)\ dx \ = \ [F(x)]_a^b \ = \ F(b) - F(a)$$

Das bestimmte Integral einer Funktion $f(x)$ ist die Differenz der Werte der Stammfunktion $F(x)$ an den beiden Grenzen (obere Grenze $-$ untere Grenze). Die Konstante C fällt dabei weg.

Einige häufig benutzte Integrale:

$$\begin{aligned}
\int x^n\ dx \ &= \ \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1) \\
\int \sin(x)\ dx \ &= \ -\cos(x) \\
\int \cos(x)\ dx \ &= \ \sin(x) \\
\int e^x\ dx \ &= \ e^x \\
\int ln(x)\ dx \ &= \ x \cdot ln(x) - x
\end{aligned}$$

Teil-Integration:

$$\int u(x)dv \ = \ u(x)v(x) - \int v(x)du$$

Dabei sind $u(x)$ und $v(x)$ Funktionen von x.

E. Verschiedenes

Definition einer Größe

$$G \ := \ \text{Definition}$$

Die linke Größe wird durch die rechte Seite der Gleichung mit := definiert.

Asymptotisch

$$a \ \sim \ b$$

$\sim$ bedeutet, dass sich b asymptotisch an a annähert, was oft zum Beispiel geschrieben wird als:

$$a \ = \ \lim_{n\to\infty} b_n$$

Umrechnen von Logarithmen

$$\begin{aligned} ln(x) \ &= \ ln(10) \cdot log(x) \ = \ 2.30258509299404568401\ldots \ \cdot log(x) \\ log(x) \ &= \ log(e) \cdot ln(x) \ = \ 0.43429448190325182765\ldots \ \cdot ln(x) \end{aligned}$$

mit $ln(x)$ als natürlicher Logarithmus (zur Basis e) und $log(x)$ als Logarithmus zur Basis 10.

Umrechnen von Logarithmen verschiedener Basen ($a \to b$)

$$\log_b(x) \ = \ \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

Fakultät

$$n! \ := \ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \cdot n$$

$n!$ ist das Produkt aller ganzen Zahlen von 1 bis n.
Per Definition setzt man $0! = 1$.

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} \ = \ \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Die Binomialkoeffizienten treten bei der Entwicklung von $(a+b)^n$ auf:

$$(a+b)^n \ = \ \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1}b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot ab^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot b^n$$

mactex-2016/pdflatex → http://www.sarahandrobin.com/ingo/mathematische-nomenklatur.pdf,
http://www.sarahandrobin.com/ingo/index.html