Ungewöhnliche Denksportaufgaben

Ingolf Giese

Januar/Februar 2021

A. Verallgemeinerter Dreisatz

Vorübung:
6 Arbeiter verputzen eine 10 m^2 große Mauer in 2 Stunden
Wieviel Arbeiter braucht man für eine 25 m^2 große Mauer bei 3 Stunden ?

Lösung:
Da 1 Arbeiter für die gleiche Arbeit längere Zeit benötigt, gilt die umgekehrte Proportionalität, also:
$6/6 = 1$ Arbeiter verputzt eine 10 m^2 große Mauer in $2{\cdot}6 = 12$ Stunden
1 Arbeiter verputzt eine $10{\cdot}(25/10) = 25$ m^2 große Mauer in $12{\cdot}(25/10) = 30$ Stunden
$1{\cdot}10 = 10$ Arbeiter verputzen eine 25 m^2 große Mauer in $30/10 = 3$ Stunden

Geht das genauso?
6 Arbeiter verputzen 10 Brathähnchen in 2 Stunden
Wieviel Arbeiter braucht man für 25 Brathähnchen bei 3 Stunden ?

Gimmick:

In 70 Minuten spielen 66 Musiker Beethovens 9.
Wie lange brauchen 80 Musiker für Beethovens 5. ?

37 Minuten!

Sehr schwierig, weil berücksichtigt werden soll, dass das Gras nachwächst:

a) 12 Kühe fressen in 16 Wochen 10 ha Gras komplett weg
b) 18 Kühe fressen in 8 Wochen 10 ha Gras komplett weg
c) Wieviel Kühe fressen in 6 Wochen 40 ha Gras komplett weg?

Idee: In 1 Woche wächst das Gras pro Hektar um z ha nach.

Daraus folgt:
a) 12 Kühe fressen in 16 Wochen $(10+16 \cdot 10 \cdot z)$ ha Gras komplett weg
b) 18 Kühe fressen in 8 Wochen $(10+8 \cdot 10 \cdot z)$ ha Gras komplett weg

Aus a) folgt:
6 Kühe fressen in 16 Wochen $(10+16 \cdot 10 \cdot z)/2$ ha Gras komplett weg
6 Kühe fressen in 8 Wochen $(10+16 \cdot 10 \cdot z)/(2 \cdot 2)$ ha Gras komplett weg
18 Kühe fressen in 8 Wochen $(10+16 \cdot 10 \cdot z)/(2 \cdot 2) \cdot 3$ ha Gras komplett weg

Vergleicht man die letzte Zeile mit b) folgt:
$(10+16 \cdot 10 \cdot z)/(2 \cdot 2) \cdot 3 = 10+8 \cdot 10 \cdot z$
$(10+16 \cdot 10 \cdot z) \cdot 3 = 4 \cdot (10+8 \cdot 10 \cdot z)$
also: $30 + 480 \cdot z = 40 + 320 \cdot z$
$160 \cdot z = 10$
Also:
Nachwachsende Grasmenge pro ha und Woche: $z = 10/160 = 5/80$

Damit folgt, wobei "inklusive" heißt, dass das Gras einschließlich dem nachgewachsenen Gras komplett weggefressen wird:

a) 12 Kühe fressen in 16 Wochen $(10+16 \cdot 10 \cdot 5/80) = 20$ ha Gras inklusive
12 Kühe fressen in $(16/2) = 8$ Wochen $(20/2) = 10$ ha Gras inklusive
$12/6 \cdot 8 = 16$ Kühe fressen in $(12/16) \cdot 8 = 6$ Wochen 10 ha Gras inklusive
c) Wieviel Kühe fressen in 6 Wochen $(40+6 \cdot 40 \cdot 5/80) = 55$ ha Gras inklusive ?
$16 \cdot 55/10 = 88$ Kühe fressen in 6 Wochen 55 ha Gras inklusive
Also:
88 Kühe fressen in 6 Wochen 40 ha Gras komplett weg

B. Logeleien

Einfaches Beispiel:

Zwei Mathematiker treffen sich zufällig im Flugzeug: "Hattest du nicht drei Söhne?", fragt der eine, "wie alt sind die denn jetzt?".
"Das Produkt der Jahre ist 36", lautet die Antwort, "und die Summe der Jahre ist genau das heutige Datum (Tages-Nummer)."
"Hmm, das reicht mir noch nicht", meint darauf der Kollege.
"Oh ja, stimmt", sagt der zweite Mathematiker, "ich habe ganz vergessen zu erwähnen, dass mein ältester Sohn einen Hund hat."

Wie alt sind die drei Söhne? Dazu erstellt man eine Tabelle der möglichen Alter, wobei deren Produkt der Jahre 36 ist und bei denen die Summe maximal 31 ist:

Da 36 zerlegbar ist in $(1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1 \cdot) 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, kann man folgende Tabelle der möglichen Jahre (mit Produkt 36) und Summen schreiben (nach Altersangaben geordnet):

Jahre	Summe der Jahre	
1, 1, 36	38	Fällt weg wegen Summe > 31
1, 2, 18	21	
1, 3, 12	16	
1, 4, 9	14	
1, 6, 6	13	
2, 2, 9	13	
2, 3, 6	11	
3, 3, 4	10	

Da dem zweiten Mathematiker diese Möglichkeiten zu einer eindeutigen Lösung nicht ausreichen, muss es eine mehrdeutige Summe geben. Es bleibt also übrig:

Jahre	Summe der Jahre
1, 6, 6	13
2, 2, 9	13

Die Aussage, dass der Älteste einen Hund hat, schließt den ersten Fall aus, da zwei Kinder gleich alt sind und damit nicht "der" Älteste sein können. Also sind die gesuchten Alter 2, 2 und 9 Jahre.

PS: Es wird unterstellt, dass die Altersdifferenz zweier Nicht-Zwillinge ≥ 1 ist.

ZEIT-Logelei vom April 1970

Die Aufgabe aus der ZEIT ist recht schwierig und außerdem sehr schön formuliert:

Briefwechsel zwischen 2 der 3 Teilnehmer eines Bier-Abends, etwas gekürzt:
Lieber Zweistein: Dreinudel lieh mir etwas Geld (wie viel, habe ich vergessen); es war ein voller Mark-Betrag und weniger als 10 Mark. Ich hatte entweder den ganzen geliehenen Betrag oder einen Teil davon für einige Maß Bier ausgegeben, die ich an jenem Abend getrunken habe. Ein Maß Bier kostete genau eine Mark.
Und wir fanden folgende Zahlenspielereien: Die Zahl der Maß Bier, die ich getrunken hatte (habe ich auch vergessen), multipliziert mit dem Betrag, den ich mir von Dreinudel geliehen hatte, ergab die Anzahl der Zigaretten, die ich geraucht hatte. Die Summe aus dem Geldbetrag und den von mir konsumierten Maß Bier war gerade die Anzahl der Maß Bier, die wir drei gemeinsam getrunken hatten. Zwar weiß ich noch, wie viele Zigaretten ich an dem Abend gepafft hatte – zu viele! –, doch habe ich vergessen, wieviel Bier wir getrunken hatten. Erinnern Sie sich noch daran?

Lieber Fünfapfel: Dank für Ihren ausführlichen Brief. Ich erinnere mich noch an die Zahl der Maß Bier, die wir drei an jenem Abend getrunken haben, doch nicht daran, wieviel Bier Sie getrunken haben. Aber ich weiß nicht, wie viele Zigaretten Sie damals geraucht haben.

Lieber Zweistein: Schönen Dank für Ihren Brief. Er hilft mir leider immer noch nicht weiter.

Lieber Fünfapfel: Für Ihren Brief vielen Dank. Auch ich bin noch nicht in der Lage, Ihre Schuld bei Dreinudel auszurechnen.

Lieber Zweistein: Tausend Dank für Ihr Schreiben. Nun weiß ich alles. Offen gestanden hatte ich bis zuletzt geglaubt, mehr Bier getrunken zu haben, wie sich jetzt herausgestellt hat.

Man hat also folgende Informationen aus den ersten Briefen:

Der Geldbetrag ”Geld” ist kleiner als 10
Das Bier von Fünfapfel ”Bier_Fünfapfel” wurde vom geliehenen Geld bezahlt, also:
”Bier_Fünfapfel” <= ”Geld”
”Bier_Fünfapfel”·”Geld” = ”Zigaretten_Fünfapfel”
”Bier_Fünfapfel” + ”Geld” = ”Bier_Alle”

”Bier_Fünfapfel” > 1 (wegen ”einige Maß”)
”Zigaretten_Fünfapfel” > 1 (wegen ”zu viele”)

Weiter gilt:
Fünfapfel kennt nur ”Zigaretten_Fünfapfel”
Zweistein kennt nur ”Bier_Alle”

Aus dem ersten Brief folgt für den Leser (und teilweise auch für Zweistein unf Fünfapfel) – da die Zigaretten-Anzahl mehrdeutig sein muss – die folgende Tabelle (dabei werden nur die 10 für Fünfapfel mehrdeutigen von den 9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 45 insgesamt möglichen Fällen aufgeschrieben):

Bier_Fünfapfel	Geld	Zigaretten_Fünfapfel	Bier_Alle
2	6	12	8
3	4	12	7
2	8	16	10
4	4	16	8
2	9	18	11
3	6	18	9
3	8	24	11
4	6	24	10
4	9	36	13
6	6	36	12

Da Zweistein zwar die Bier-Anzahl kennt, aber nichts entscheiden kann, bleiben nur die mehrdeutigen Fälle für Bier_Alle übrig:

Bier_Fünfapfel	Geld	Zigaretten_Fünfapfel	Bier_Alle
2	6	12	8
4	4	16	8
2	8	16	10
4	6	24	10
2	9	18	11
3	8	24	11

Der 3. Brief hilft nicht weiter, schränkt aber weiter die Fälle ein:

Bier_Fünfapfel	Geld	Zigaretten_Fünfapfel	Bier_Alle
4	4	16	8
2	8	16	10
4	6	24	10
3	8	24	11

Der 4. Brief hilft auch nicht weiter, schränkt aber noch mehr Fälle ein:

Bier_Fünfapfel	Geld	Zigaretten_Fünfapfel	Bier_Alle
2	8	16	10
4	6	24	10

Der 5. Brief bringt die Lösung, insbesondere durch Fünfapfels Aussage: "Ich hatte bis zuletzt geglaubt, mehr Bier getrunken zu haben, wie sich jetzt herausgestellt hat.":

Bier_Fünfapfel	Geld	Zigaretten_Fünfapfel	Bier_Alle
2	8	16	10

C. Matrosen und Kokosnüsse

Diese Aufgabe ist für $m = 3$ Matrosen bekannt, aber auch für andere m interessant.

Drei Matrosen wurden durch einen Schiffbruch auf eine entlegene Insel verschlagen, und sie verbrachten den ersten Tag damit, Kokosnüsse als Nahrung zu sammeln. Dann legten sie sich schlafen.
Als jedoch alle schliefen, wachte ein Matrose auf und überlegte sich, dass am anderen Morgen die Kokosnüsse doch verteilt werden würden, und so beschloss er, sich seinen Teil schon jetzt zu sichern. Er verteilte also die Kokosnüsse auf drei gleiche Haufen. Eine Kokosnuss blieb übrig, und er gab sie einem Affen, dann versteckte er seinen Anteil und legte die restlichen Kokosnüsse wieder zusammen.
Nach und nach wachte jeder der anderen Matrosen auf und tat das Gleiche. Jedesmal blieb eine Kokosnuss übrig, die der Affe bekam.
Tags darauf sagt aus Scham keiner der Matrosen etwas über den verkleinerten Haufen und so wird nochmals durch drei geteilt. Wieder erhält ein Affe eine Nuss, da die Division nicht aufgeht.
Welches ist die kleinste Anzahl n von Kokosnüssen, bei denen diese Rechnung aufgeht?

Test mit der Gesamtzahl $n = 79$:
1. Schritt: 1 Kokosnuss erhält der Affe, $m_1 = 26$ werden geklaut, $n_1 = 52$ bleiben übrig.
2. Schritt: 1 Kokosnuss erhält der Affe, $m_2 = 17$ werden geklaut, $n_2 = 34$ bleiben übrig.
3. Schritt: 1 Kokosnuss erhält der Affe, $m_3 = 11$ werden geklaut, $n_3 = 22$ bleiben übrig.
Offizielle Aufteilung: 1 erhält der Affe, jeder Matrose erhält $j = 7$ Kokosnüsse.

Das ergibt folgende Gesamt-Rechnung, damit am Ende jeder j Kokosnüsse bekommt:

$$
\begin{aligned}
m_1 &= (n-1)/3 & n_1 &= 2 \cdot m_1 = 2/3 \cdot (n-1) \\
m_2 &= (n_1-1)/3 & n_2 &= 2 \cdot m_2 = 2/3 \cdot (n_1-1) \\
m_3 &= (n_2-1)/3 & n_3 &= 2 \cdot m_3 = 2/3 \cdot (n_2-1) \\
& & j &= 1/3 \cdot (n_3-1)
\end{aligned}
$$

Durch Einsetzen und Ausmultiplizieren folgt:

$$j = 1/3 \cdot (2/3 \cdot (2/3 \cdot (2/3 \cdot (n-1) - 1) - 1) - 1)$$

bzw. nach n aufgelöst:

$$n = (((j \cdot 3 + 1) \cdot 3/2 + 1) \cdot 3/2 + 1) \cdot 3/2 + 1$$

Diese Aufgabe wird oft auch für eine allgemeine Anzahl von m Matrosen gestellt, insbesondere für 4 und auch von 5 Matrosen (schon 1926!).

Für m Matrosen gilt dann mit dem Faktor $f = (m-1)/m$
für j:

$$j = 1/m \cdot (f^m \cdot (n-1) - f^{m-1} - f^{m-2} - \ldots - f^2 - f^1 - f^0)$$

bzw. für n:

$$n = 1/(f^m) \cdot (m \cdot j + f^{m-1} + f^{m-2} + \ldots + f^2 + f^1 + f^0) + 1$$

Dann wird argumentiert, dass man durch Einsetzen von verschiedenen Werten von n so lange j berechnen muss, bis j ganzzahlig ist; umgekehrt kann man auch j variieren und daraus n berechnen, bis n ganzzahlig ist – was im Allgemeinen effektiver, also schneller geht; ab $m > 5$ ist der Laufzeitfaktor etwa 20.

Das funktioniert zwar für $m = 3$ Matrosen, ist aber prinzipiell falsch, weil man so nicht gewährleisten kann, dass auch bei allen Zwischenschritten nur ganzzahlige Werte auftreten.
So erhält man für $m = 9$ als kleinsten Wert für n bzw. j die Werte $n = 268891396$ mit $j = 10350508$. Das ist aber falsch! Schon im ersten Schritt entsteht keine ganze Zahl: (268891396 - 1)/9 = 29876821.66666...

Erst der 38. so gefundene Wert ergibt die richtige Lösung $n = 3486784393$ mit $j = 134217727$. Ähnliches gilt für $m > 9$.

Bei $m = 8$ ist zwar die erste gefundene Lösung $n = 134217721$ mit $j = 5764800$ richtig, aber ab dem 17. Wert sind jeweils 2 von 3 aufeinander folgenden "Lösungen" falsch.

Auch bei $m = 7$ ist die erste Lösung $n = 5764795$ mit $j = 279935$ richtig, aber ab Lösung Nr. 5961 sind wieder jeweils 2 von 3 aufeinander folgenden "Lösungen" falsch.

Einen besseren Algorithmus leitet man daher erst einmal für den Fall ohne Affe her:

$$
\begin{array}{lll}
n_1 = n - n/m & = (1 - 1/m) \cdot n & = (m-1)/m \cdot n \\
n_2 = (m-1)/m \cdot n \cdot (1 - 1/m) & = ((m-1)/m)^2 \cdot n & = (m-1)^2/m^2 \cdot n \\
\ldots & & \\
n_m = ((m-1)/m)^{m-1} \cdot n \cdot (1 - 1/m) & = ((m-1)/m)^m \cdot n & = (m-1)^m/m^m \cdot n \\
j = ((m-1)/m)^m \cdot n/m & = (m-1)^m/m^{m+1} \cdot n &
\end{array}
$$

Die kleinste Lösung, damit j ganzzahlig ist, lautet also:

$$n = m^{m+1}$$

und damit

$$j = (m-1)^m$$

Für den Fall, dass für den Affen Kokosnüsse vergeben werden, muss n um m kleiner sein wegen der Teilbarkeit durch m, aber zusätzlich um 1 höher für den Affen:

$$\mathbf{n = m^{m+1} - m + 1}$$

Dann muss auch j ein wenig, und zwar um 1 kleiner sein:

$$\mathbf{j = (m-1)^m - 1}$$

Herleitung – hier ist auch die Teilbarkeit durch m bei jedem m_x in jedem Schritt gewährleistet:

$$
\begin{array}{lll}
n = m^{m+1} - m + 1 & & \\
m_1 = (n-1)/m & = (m^{m+1} - m)/m & = m^m - 1 \\
n_1 = (m-1) \cdot m_1 & = (m-1) \cdot (m^m - 1) & = m^m \cdot (m-1) - m + 1 \\
m_2 = (n_1 - 1)/m & = (m^m \cdot (m-1) - m)/m & = m^{m-1} \cdot (m-1) - 1 \\
n_2 = (m-1) \cdot m_2 & = (m-1) \cdot (m^{m-1} \cdot (m-1) - 1) & = m^{m-1} \cdot (m-1)^2 - m + 1 \\
m_3 = (n_2 - 1)/m & = (m^{m-1} \cdot (m-1)^2 - m)/m & = m^{m-2} \cdot (m-1)^2 - 1 \\
n_3 = (m-1) \cdot m_3 & = (m-1) \cdot (m^{m-2} \cdot (m-1)^2 - 1) & = m^{m-2} \cdot (m-1)^3 - m + 1 \\
\ldots & & \\
m_m = (n_{m-1} - 1)/m & = (m^2 \cdot (m-1)^{m-1} - m)/m & = m^1 \cdot (m-1)^{m-1} - 1 \\
n_m = (m-1) \cdot m_m & = (m-1) \cdot (m^1 \cdot (m-1)^{m-1} - 1) & = m^1 \cdot (m-1)^m - m + 1 \\
j = n_m/(m-1) & = (m-1)^m - 1 &
\end{array}
$$

Also überall das gleiche Muster für m_x und n_x bis zum Ende bei $x = m$.

Tabelle für m von 2 bis 9:

m	n	j	$\triangle n$	$\triangle j$
2	7	0	8	1
3	79	7	81	8
4	1021	80	1024	81
5	15621	1023	15625	1024
6	279931	15624	279936	15625
7	5764795	279935	5764801	279936
8	134217721	5764800	134217728	5764801
9	3486784393	134217727	3486784401	134217728

Alle Lösungen für ein bestimmtes m erhält man mit $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ durch:

$$n + k \cdot \triangle n$$
$$j + k \cdot \triangle j$$

D. Altersrätsel

Fritz und Karl

Fritz ist 24 Jahre alt. Er ist doppelt so alt wie Karl war, als Fritz so alt war wie Karl heute.

Vorgehen: Man schreibt die Altersangaben für Fritz (F) und Karl (K) mit Zeitangaben:

F(heute) = 24
F(heute) = 2·K(vorher)
F(vorher) = K(heute)

Mit der Zeitdifferenz t = "heute − vorher" gilt dann:

F(vorher) = F(heute) − t = F − t
K(vorher) = K(heute) − t = K − t

Und damit schreibt man statt F(heute) = 2·K(vorher) nun kürzer:
F = 2·(K − t)

Aus F(vorher) = K(heute) folgt F − t = K, und damit im Vergleich:

F = 24 = 2·K − 2·t
und
F = 24 = K + t
also:
12 = K − t
24 = K + t

Summiert man die beiden letzten Gleichungen, verschwindet t:
$36 = 2 \cdot K$ oder $K = 18$
und damit folgt für die Zeitdifferenz $t = 6$

Also ist Karl 18 Jahre alt.
PS: Das geht auch im Kopf: K = genau in der Mitte von F und $F/2 = 3/4 \cdot F$

Peter und Emil

Wenn Peter (P) 5 Jahre jünger wäre, dann wäre er zweimal so alt wie Emil (E) war, als Emil 6 Jahre jünger war; und wenn Peter 9 Jahre älter wäre, dann wäre er dreimal so alt wie Emil, wenn Emil 4 Jahre jünger wäre.

Daraus leitet man ab:

$P - 5 = 2 \cdot (E - 6) = 2 \cdot E - 12$
$P + 9 = 3 \cdot (E - 4) = 3 \cdot E - 12$

Zieht man die erste Gleichung von der zweiten ab, verschwindet P und es folgt:

$9 - (-5) = E$
Also: $E = 9 + 5 = 14$
und damit:
$P = 2 \cdot (E - 6) + 5 = 21$

Also ist Peter 21 Jahre und Emil 14 Jahre alt.

Max, Fritz und Paul

Max (M) ist doppelt so alt, wie Fritz (F) sein wird, wenn Paul (P) so alt ist wie Max heute.

Wer ist der Jüngste und wer der Älteste?
Wieder schreibt man mit den Zeitangaben, wobei "dann > heute" gilt:

$M(\text{heute}) = 2 \cdot F(\text{dann})$
$P(\text{dann}) = M(\text{heute})$

Daraus folgt direkt:
$P(\text{dann}) = 2 \cdot F(\text{dann})$
also:
$P = 2 \cdot F$, das heißt: $P > F$

Und aus $P(\text{dann}) = M(\text{heute})$ folgt wegen "dann > heute":
$M > P$

Insgesamt weiß man nun:
$M > P > F$
Fritz ist der Jüngste, Max der Älteste.

Celine, ihr Vater und ihr Sohn
Aus dem Artikel "Logelei" von Zweistein eines etwa 30 Jahre alten ZEITmagazins:

Celine erzählt: Wenn ich (C) so alt sein werde, wie mein Vater (V) heute ist, werde ich fünfmal so alt sein wie mein Sohn (S) heute ist, und mein Sohn wird dann 8 Jahre älter sein, als ich heute bin.
Übrigens: Wenn man mein Alter und das meines Vaters zusammenzählt, kommen gerade 100 Jahre heraus.

Mit den Zeitangaben gilt also:

C(dann) = V(heute)
C(dann) = 5·S(heute)
S(dann) = C(heute) + 8
C(heute) + V(heute) = 100

Mit der Zeitdifferenz t = "dann − heute" folgt:
C + t = V
C + t = 5·S
S + t = C + 8
C + V = 100

Aus der ersten und letzten Beziehung bestimmt man:
C + t = V = 100 − C, also
2·C + t = 100
und aus den anderen:
C + t = 5·(C + 8 − t) = 5·C + 40 − 5·t, also
6·t = 4·C + 40

Insgesamt folgt somit für C:
6·(100 − 2·C) = 4·C + 40, also
560 = 16·C
C = 560/16 = 35

Damit sind Celine 35, der Vater 65 und der Sohn 13 Jahre alt – bei einer Zeitdifferenz von 30 Jahren.

Wirklich komplex ist die folgende Aufgabe
Aus dem gleichen Artikel "Logelei" von Zweistein des ZEITmagazins:

Rätsel über das Alter zweier Angestellten einer Firma (Herr Zahlmüller Z und Herr Tormayer T), die beide am gleichen Tag Geburtstag haben:

Als Z doppelt so alt war wie T zu der Zeit, als Z dreimal so alt war wie T zu der Zeit,
da Z halb so alt war, wie T sein wird, wenn Z viermal so alt sein wird, wie T zu der Zeit,
da Z ein Jahr jünger war, als T heute ist,
da war T ein Drittel so alt, wie er heute vor zwei Jahren war.
Und: In acht Jahren wird T so alt sein, wie Z war, als T halb so alt war, wie Z heute ist.

Mit den 6 Zeitdifferenzen t1 bis t6 kann man nun 8 Gleichungen aufstellen:

(1) $Z - t1 = 2 \cdot (T - t2)$
(2) $Z - t2 = 3 \cdot (T - t3)$
(3) $Z - t3 = 1/2 \cdot (T + t4)$
(4) $Z + t4 = 4 \cdot (T - t5)$
(5) $Z - t5 = T - 1$
(6) $T - t1 = 1/3 \cdot (T - 2)$
(7) $T + 8 = Z - t6$
(8) $T - t6 = 1/2 \cdot Z$

Bemerkung:
Die Gleichung (5) kann schnell falsch aus dem Text ermittelt werden, da man vielleicht ansetzt: $Z - t5 - 1 = T$. Das ist aber nicht richtig.

Aus Gleichung (6) folgt direkt:
$t1 = T - 1/3 \cdot T + 2/3 = 2/3 \cdot T + 2/3$

t1 eingesetzt in Gleichung (1) ergibt:
$Z - 2/3 \cdot (T+1) = Z - 2/3 \cdot T - 2/3 = 2 \cdot T - 2 \cdot t2$
also:
$t2 = -1/2 \cdot Z + 4/3 \cdot T + 1/3$

t2 eingesetzt in Gleichung (2) ergibt:
$Z + 1/2 \cdot Z - 4/3 \cdot T - 1/3 = 3/2 \cdot Z - 4/3 \cdot T - 1/3 = 3 \cdot T - 3 \cdot t3$
also:
$t3 = -1/2 \cdot Z + 13/9 \cdot T + 1/9$

t3 eingesetzt in Gleichung (3) ergibt:
$Z + 1/2 \cdot Z - 13/9 \cdot T - 1/9 = 1/2 \cdot T + 1/2 \cdot t4$
also:
$t4 = 3 \cdot Z - 35/9 \cdot T - 2/9$

t4 eingesetzt in Gleichung (4) ergibt:
$Z + 3 \cdot Z - 35/9 \cdot T - 2/9 = 4 \cdot T - 4 \cdot t5$
also:
$t5 = -Z + 71/36 \cdot T + 2/36$

t5 eingesetzt in Gleichung (5) ergibt direkt:
$t5 = Z - T + 1$

Ein Vergleich beider t5 ergibt eine Beziehung zwischen Z und T:
$-Z + 71/36 \cdot T + 2/36 = Z - T + 1$
oder:
(9) $107 \cdot T = 72 \cdot Z + 34$

Und aus den Gleichungen (7) und (8) folgen die beiden Formeln für t6:
$t6 = Z - T - 8$
$t6 = -1/2 \cdot Z + T$

Ein Vergleich beider t6 ergibt eine zweite Beziehung zwischen Z und T:
$3/2 \cdot Z - 8 = 2 \cdot T$
oder:
(10) $4 \cdot T + 16 = 3 \cdot Z$

Aus den Gleichungen (9) und (10) folgt für die beiden Unbekannten Z und T durch eine Erweiterung von (10) mit $72/3 = 24$:
$107 \cdot T - 34 = 96 \cdot T + 384$
und daraus die Lösung für T:
$\mathbf{T = 38}$
und damit die Lösung für Z:
$Z = (4 \cdot T + 16)/3 \Rightarrow \mathbf{Z = 56}$

Für die Zeiten t1 bis t6 ergibt sich:
t1 = 26
t2 = 23
t3 = 27
t4 = 20
t5 = 19
t6 = 10

Bemerkung:
Aus der Beziehung (10) kann man auch schließen, dass es nur 10 Fälle für ganzahlige Z und T gibt, bei denen beide Alter im Bereich 15 bis 65 sind ($n = 0, \ldots, 9$):
$Z = 28 + n \cdot 4$, also $28, 32, \ldots, 56, \ldots, 64$
$T = 17 + n \cdot 3$, also $17, 20, \ldots, 38, \ldots, 44$

Und schon aus $t5 = -Z + 71/36 \cdot T + 2/36$ folgt dann, dass t5 nur für Z = 56 und T = 38 ganzzahlig ist, was direkt zur Lösung führt, wenn man die Ganzzahligkeit der Zeitdifferenzen (insbesondere t5) unterstellt; z.B. ist t5 = 7.5 für Z = 32 und T = 20.

Eine ähnliche Aufgabe aus dem gleichen Jahr des ZEITmagazins
Eine Filmdiva (F) antwortet auf die Frage nach ihrem Alter:

Als mein Mann (M) ein Drittel des Alters erreicht hatte, das ich haben werde, wenn mein Mann dreimal so alt sein wird, wie ich war, als mein Mann viermal so alt war wie ich zu der Zeit, als mein Mann doppelt so alt war wie ich, da war ich fünf Jahre jünger als zu der Zeit, da mein Mann halb so alt war, wie er heute ist.
Und: Die Quersumme des jetzigen Alters meines Mannes ist gleich der Quersumme meines Alters.

Die Rechnung geht ähnlich der vorhergehenden Aufgabe mit 5 Zeitdifferenzen. Aus der dann gewonnenen Gleichung $13 \cdot M = 16 \cdot F + 30$ folgen mehrere Möglichkeiten für F und M:

16	22	
29	**38**	⇒ Lösung mit beiden Quersummen 11
42	54	
55	70	
68	86	⇒ Zweite denkbare Lösung (Quersumme 14), aber sehr hohe Alterszahlen

E. Effektiver Kurs nach Ankauf und Verkauf

Beispiel (Kurse vom Herbst 2007):

Ankauf 120000 Yen zu 153.53 Yen/Euro $\Rightarrow$ 781.61 Euro
Verkauf 36000 Yen zu 173.52 Yen/Euro $\Rightarrow$ 207.47 Euro
Was ist der effektive Kurs für die 84000 ausgegebenen Yen?

Man erwartet einen effektiven Kurs von vielleicht 163.00 Yen/Euro (mittlerer Wert der Kurse), aber näher an 153.53 als an 173.52, da mehr Yen angekauft statt verkauft wurden.

Rechnung: $120000 - 36000 = 84000$ Yen mit $781.61 - 207.47 = 574.14$ Euro

Das heißt aber:
Effektiver Kurs: $84000 \;/\; 574.14 = 146.31$ Yen/Euro

Das ist also entgegen der Erwartung! Allgemein rechnet man mit:
A = Ankaufssumme, V = Verkaufssumme (mit $A > V$)
AK = Ankaufskurs, VK = Verkaufskurs (mit $AK \neq VK$), EK = Effektiver Kurs

$$\begin{aligned} EK &= (A - V) \;/\; (A/AK - V/VK) = (A - V) \;/\; ((VK{\cdot}A - AK{\cdot}V) \;/\; (AK{\cdot}VK)) \\ &= AK{\cdot}VK{\cdot}(A - V) \;/\; (VK{\cdot}A - AK{\cdot}V) \end{aligned}$$

Mit $AK \gtrless VK$, d.h. eines von beiden ist richtig, folgt:

$$\begin{aligned} AK{\cdot}V &\gtrless VK{\cdot}V \\ VK{\cdot}A - VK{\cdot}V &\gtrless VK{\cdot}A - AK{\cdot}V \\ AK{\cdot}VK{\cdot}(A - V) &\gtrless AK{\cdot}(VK{\cdot}A - AK{\cdot}V) \\ EK &\gtrless AK \end{aligned}$$

Also gilt für beide Fälle:
$EK \gtrless AK \gtrless VK \Rightarrow$
$EK > AK > VK$ bzw. $EK < AK < VK$

Der effektive Kurs liegt also immer außerhalb der Ankauf- und Verkaufs-Kurse!

F. Bellsucht

Noch erstaunlicher ist das Ergebnis der Aufgabe, die Hans-Herrmann Dubben und Hans-Peter Beck-Bornholdt in ihrem Buch von 1997 ”Der Hund, der Eier legt“ beschreiben:
Ein Tourist besuchte ein Urlaubsland, in dem eine seltene Krankheit, die ”Bellsucht“, auftrat.
Ein Test im Heimatland ergab dann ein positives Ergebnis.
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er wirklich erkrankt ist?

Dazu muss man wissen:
Die Bellsucht tritt nur bei jedem 1000. Touristen, der in dem Land war, auf (d.h. Ansteckungsrate: 1000) und zeigt anfangs keine Symptome.
Die Zuverlässigkeit des Tests ist extrem hoch: Bei 99 von 100 Menschen, die infiziert sind, wird die Krankheit durch den Test erkannt.
Und von 100 Nichtinfizierten werden 98 durch den Test als gesund erkannt.

Daher vermutet man i.A. eine Wahrscheinlichkeit in der Größenordnung von etwa 90 %, dass der Tourist erkrankt ist.

Eine Rechnung mit einer "gut" verteilten Anzahl von 100000 Personen ergibt aber:

Jede 1000. Person, also (im Durchschnitt) 100 Personen, sind erkrankt.
Von diesen werden 99 %, also 99 Personen, richtig als krank erkannt.
Und von den $100000-100 = 99900$ Gesunden werden durch den Test 98 %, also 97902 Personen, richtig als gesund erkannt.
Das heißt aber, 2 %, also 1998 Personen, werden fälschlicherweise als krank bezeichnet (falsch positiv).

Insgesamt werden somit $99 + 1998 = 2097$ positiv getestet, von denen aber nur 99 Personen wirklich erkrankt sind.
Die Wahrscheinlichkeit, wirklich erkrankt zu sein, ist also nur $\mathbf{99/2097 = 4.72\ \%}$!!
Die Ursache für diese geringe Trefferquote liegt in der Seltenheit der Krankheit.

Für diese 2097 Personen ist daher zweiter Test sinnvoll.
Von den 99 wirklich Kranken werden dabei wieder 99 %, also 98 Personen, richtig positiv getestet.
Von den 1998 Gesunden werden 2 %, also 40 Personen, wieder falsch positiv getestet.

Insgesamt werden $98 + 40 = 138$ Personen positiv getestet, aber nur 98 davon sind wirklich erkrankt.
Die Wahrscheinlichkeit, wirklich erkrankt zu sein, ist nach dem zweiten Test immerhin $98/138 = 71.0$ % ! Auch durch den zweiten Test haben immer noch 29 % der Personen die Chance, gar nicht erkrankt zu sein!

Auch bei höherer Ansteckungsrate von 100 statt 1000 errechnet sich nach dem 1. Test die Wahrscheinlichkeit, sich angesteckt zu haben, zu etwa 33.3 % statt 4.72 %.

G. Ziegenproblem

In einer Fernsehshow zeigt der Moderator dem Kandidaten drei Türen und erklärt ihm, dass hinter einer Tür ein Auto steht (das der Kandidat dann gewinnen kann) und hinter den anderen beiden steht jeweils eine Ziege. Der Kandidat wählt eine Tür aus. Dann sagt der Moderator: "Bevor Sie diese Tür öffnen, zeige ich Ihnen, was hinter einer anderen Tür steht. Wollen Sie daraufhin wechseln?"
Soll der Kandidat wechseln? **Ja!**

Selbstverständlich weiß der Moderator, hinter welcher Tür das Auto steht und selbstverständlich wird er diese Tür nicht öffnen (das wurde von vielen angezweifelt, die mit der Lösung nicht einverstanden waren) – es ist eben eine Fernsehshow.

Die Wahrscheinlichkeit, dass hinter der vom Kandidaten gewählten Tür (o.B.d.A. die Tür Nr. 1) das Auto steht, ist **1/3** – und das ändert sich auch nicht.
Es gibt nun die drei folgenden **gleichwahrscheinlichen** Situationen:
A) Das Auto steht hinter Tür 1, der Moderator öffnet Tür 2 (W=1/6) oder Tür 3 (W=1/6), in der Summe also W=1/3.
B) Das Auto steht hinter Tür 2, der Moderator öffnet Tür 3 (W=1/3).
C) Das Auto steht hinter Tür 3, der Moderator öffnet Tür 2 (W=1/3).
$\Rightarrow$
A) Bleibt der Kandidat bei seiner ersten Wahl (Tür 1), gewinnt er das Auto.
B) Wechselt der Kandidat (also zu Tür 2), gewinnt er das Auto.
C) Wechselt der Kandidat (also zu Tür 3), gewinnt er das Auto.

Also verdoppelt das Wechseln die Wahrscheinlichkeit zu **2/3**, das Auto zu gewinnen!

H. Geschwister-Problem

Die Bellsucht-Aufgabe und auch das eigentlich einfache Ziegenproblem wie auch das Geburtstags-Paradoxon (von 23 Personen sind mit über 50 % Wahrscheinlichkeit 2 Personen dabei, die am gleichen Tag Geburtstag haben) zeigen, dass der Mensch wenig Gespür für Wahrscheinlichkeiten hat. Noch extremer zeigt sich das bei folgendem Problem (für das sogar Wikipedia eine eigene Webseite hat – Junge-oder-Mädchen-Problem):

Man betrachtet nur Familien mit 2 Kindern. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Verteilung von Söhnen und Töchtern gleich groß ist; eineiige Zwillinge werden nicht betrachtet. Die Wahrscheinlichkeit, 2 Töchter zu haben, ist nach diesen Voraussetzungen: **W=1/4**.

a) Man FRAGT einen Vater, ob er eine Tochter hat. Dieser antwortet mit "Ja". Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er zwei Töchter hat: **Wa=1/3**.

b) Man SIEHT einen Vater, der mit einer Tochter spazieren geht. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er zwei Töchter hat: **Wb=1/2**.

Woher kommt dieser erstaunliche Unterschied?

Den Fall, dass der Vater zwei Söhne hat, kann man gleich weglassen, also muss man nur die folgenden jeweils 6 Situationen (Vater-Typen) betrachten:
Fall a):

Vater mit Tochter-Tochter:	1) Vater hat ältere Tochter
	2) Vater hat jüngere Tochter
Vater mit Sohn-Tochter:	3) Vater hat älteren Sohn
	4) Vater hat jüngere Tochter
Vater mit Tochter-Sohn:	5) Vater hat ältere Tochter
	6) Vater hat jüngeren Sohn

Fall b):

Vater mit Tochter-Tochter:	1) Vater hat ältere Tochter und geht mit ihr spazieren
	2) Vater hat jüngere Tochter und geht mit ihr spazieren
Vater mit Sohn-Tochter:	3) Vater hat älteren Sohn
	4) Vater hat jüngere Tochter und geht mit ihr spazieren
Vater mit Tochter-Sohn:	5) Vater hat ältere Tochter und geht mit ihr spazieren
	6) Vater hat jüngeren Sohn

FRAGT man den Vater, ob er (mindestens) eine Tochter hat, sagen diese 6 Väter: Ja. Dabei hat der Vater in 2 von 6 Fällen zwei Töchter → Wa = 2/6 = 1/3.

SIEHT man den Vater mit der Tochter spazieren gehen, gibt es aber nur 4 Fälle, wobei der Vater in 2 von 4 Fällen zwei Töchter hat → Wb = 2/4 = 1/2.
Bei dem Vater, der mit dem Sohn spazieren geht, sieht man eben die Tochter nicht.
Man kann im Fall b) aber auch direkt sagen, da das Geschlecht des 2. Kindes unabhängig vom 1. Kind ist, dass die Wahrscheinlichkeit für eine zweite Tochter immer 1/2 ist.

Wirklich überraschend ist die folgende Variante nach dem US-Rätselerfinder Gary Foshee:
c) Man weiß, dass eines der Kinder eine Tochter ist, die an einem Sonntag geboren wurde. Wie wahrscheinlich ist es, dass das andere Kind auch eine Tochter ist?

Die erstaunliche Antwort ist **Wc=13/27**, also nur etwas weniger als 1/2!

Weil mindestens eine Tochter an einem Sonntag geboren wurde, reduzieren sich die möglichen Kombinationen des Geschwisterpaars wie folgt:

Fall 1: Das erste Kind ist T-So. Für das zweite gibt es dann folgende 14 Varianten:
S-Mo, S-Di, S-Mi, S-Do, S-Fr, S-Sa, S-So, T-Mo, T-Di, T-Mi, T-Do, T-Fr, T-Sa, T-So.
In 7 Fällen von diesen 14 Varianten ist das zweite Kind eine Tochter.

Fall 2: Das zweite Kind ist T-So. Dann gibt es fürs erste Kind nur 13 Möglichkeiten – denn die Variante, dass beide T-So sind, wurde in Fall 1 ja schon berücksichtigt:
S-Mo, S-Di, S-Mi, S-Do, S-Fr, S-Sa, S-So, T-Mo, T-Di, T-Mi, T-Do, T-Fr, T-Sa.
In 6 Fällen von diesen 13 Varianten ist das erste Kind eine Tochter.

Also teilt man die Zahl der Tochter-Tochter-Fälle durch die Gesamtzahl der möglichen Kombinationen und erhält wieder: (7+6)/(14+13) = 13/27 = 48.1481 %.

Weiß man von der Tochter, dass sie an einem von t Wochentagen, $1 \leq t \leq 7$, geboren wurde, so ist die Wahrscheinlichkeit für 2 Töchter: $(7 + (7 - t)) / (14 + (14 - t))$.

I. Es ist $0 + 3 - 5 + 2 = 0$

Ein Mathematiker beobachtet den einzigen Eingang zu einem leeren Raum. Dann betreten 3 Erwachsene den Raum, und etwas später kommen 5 Erwachsene heraus.
Was denkt der Mathematiker?
Wenn jetzt noch 2 hinein gehen, ist der Raum leer.

MacTeX 2020/pdflatex → https://www.sarahandrobin.com/ingo/logeleien.pdf,
https://www.sarahandrobin.com/ingo/index.html