Über irrationale Zahlen

Ingolf Giese

März 2018

Irrational sind diejenigen reellen Zahlen, die nicht durch einen Bruch zweier ganzer Zahlen, z.B. $\dfrac{p}{q}$ mit p und q ($q \neq 0$), ausgedrückt werden können.

Beweisen kann man die Irrationalität einer Zahl im Allgemeinen nur durch einen Widerspruchsbeweis, d.h. man nimmt einen Bruch $\dfrac{p}{q}$ an und führt das zum Widerspruch.

Im Folgenden werden die möglichen irrationalen Zahlen $\sqrt{2}$, $\sqrt{4}$, e und π untersucht.

A. Wurzel aus 2

Behauptung: $\sqrt{2}$ **ist irrational.**

Beweis durch Widerspruch:
Angenommen, die Quadratwurzel $\sqrt{2}$ ist rational, das heißt, es gibt zwei positive ganze Zahlen p und q, mit:

$$\sqrt{2} \;=\; \frac{p}{q}$$

Dabei sollen zusätzlich p und q teilerfremd sein (d.h. p und q haben keinen gemeinsamen Teiler außer 1, können daher nicht gekürzt werden).
Durch Quadrieren erhält man daraus:

$$2 \;=\; \frac{p^2}{q^2}$$

(1) $\qquad 2 \cdot q^2 \;=\; p^2$

Die linke Seite ($2 \cdot q^2$) ist eine gerade Zahl, also muss auch die rechte Seite gerade sein. Wenn aber p^2 gerade ist, muss auch p gerade sein (denn wenn p ungerade ist, ist auch p^2 ungerade), z.B. mit einer (positiven) ganzen Zahl m:

(2) $\qquad p \;=\; 2 \cdot m \quad \rightarrow \quad p^2 \;=\; 4 \cdot m^2$

In Gleichung (1) eingesetzt und dann gekürzt folgt:

$$2 \cdot q^2 \;=\; 4 \cdot m^2 \quad \rightarrow \quad q^2 \;=\; 2 \cdot m^2$$

Das heißt, dass auch q^2 eine gerade Zahl ist, also muss ebenso q gerade sein, z.B. mit einer (positiven) ganzen Zahl n:

$$(3) \qquad q \;=\; 2 \cdot n$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) erkennt man, dass p und q nicht teilerfremd sind, da sie den gemeinsamen Faktor 2 haben:

$$(4) \qquad \sqrt{2} \;=\; \frac{p}{q} \;=\; \frac{2 \cdot m}{2 \cdot n}$$

Da hier der Faktor 2 gekürzt werden kann, ist das ein Widerspruch zu der zusätzlichen Annahme, dass $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden p und q sein soll. Also ist $\sqrt{2}$ irrational.

Diesen Beweis, der wohl schon etwa um 500 - 450 v.Chr. bekannt war und später von Euklid beschrieben wurde, findet man auch in der Literatur, z.B. bei
`https://de.wikipedia.org/wiki/Beweis_der_Irrationalität_der_Wurzel_aus_2_bei_Euklid`

Es ist aber unklar, ob die Methode des Widerspruchs mit der Teilerfremdheit wirklich "richtig" ist, denn damit kann man auch "beweisen", dass $\sqrt{4}$ irrational ist (siehe Kapitel B).

Es gibt aber auch andere Methoden des Beweises der Irrationalität von $\sqrt{2}$ ohne Benutzung der Teilerfremdheit:

Methode 2:

Betrachte die letzte Gleichung (4), wobei bei der Annahme **nicht** vorausgesetzt wird, dass zusätzlich p und q teilerfremd sein sollen:

$$\sqrt{2} \;=\; \frac{p}{q} \;=\; \frac{2 \cdot m}{2 \cdot n} \;=\; \frac{m}{n}$$

Man sieht, dass man nach dem Kürzen der 2 die gleiche Struktur erhält, also $\frac{m}{n}$ statt $\frac{p}{q}$. D.h. man kann analog oben (Gleichungen (2) und (3)) weiter herleiten:

$$m \;=\; 2 \cdot s \quad \rightarrow \quad n \;=\; 2 \cdot t$$

also insgesamt:

$$\sqrt{2} \;=\; \frac{p}{q} \;=\; \frac{2 \cdot m}{2 \cdot n} \;=\; \frac{m}{n} \;=\; \frac{2 \cdot s}{2 \cdot t} \;=\; \frac{s}{t}$$

Das kann man nun unendlich oft weiterführen und kommt zu keinem Ergebnis, also kann $\sqrt{2}$ nicht rational sein.

Dieser Schluss ist beim "Beweis" der Irrationalität von $\sqrt{4}$ nicht möglich, da dort nach dem Kürzen der Bruch $\frac{2}{1}$ auftritt, die Folge der Beweisschritte also beendet ist.

Diese Methode hat den Vorteil, dass sie sehr nahe am Euklidischen Beweis liegt.

Methode 3:

Betrachte nach Gleichung (1):

$$p^2 \;=\; 2 \cdot q^2$$

Wenn eine Zahl mit zwei (ganzzahligen) Faktoren, z.B. $a \cdot b$, geschrieben werden kann, gilt für das Quadrat dieser Zahl:

$$(a \cdot b)^2 \;=\; a^2 \cdot b^2$$

Wenn eine Quadratzahl in zwei Faktoren zerlegt werden kann, bei der ein Faktor eine Quadratzahl ist, muss also auch der andere Faktor eine Quadratzahl sein.

Da p^2 eine Quadratzahl ist, muss auch $2 \cdot q^2$ eine Quadratzahl sein. Das bedeutet aber, dass 2 eine Quadratzahl sein müsste, was aber falsch ist.

Diese Methode führt bei $\sqrt{4}$ nicht zum Widerspruch, da $4 = 2^2$ eine Quadratzahl ist. Diese Vorgehensweise hat Ähnlichkeit mit Methode 4.

Methode 4 - Optimale Methode:

Betrachte wieder nach Gleichung (1):

$$p^2 \;=\; 2 \cdot q^2$$

Zerlegt man nun p und q in ihre (eindeutigen) Primfaktoren (z.B. $1960 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$), so haben die Quadrate p^2 und q^2 die doppelte Anzahl der zugehörigen Primfaktoren, also jeweils eine gerade Zahl von Primfaktoren.

Die linke Seite der Gleichung hat also eine gerade Anzahl von Primfaktoren, während die rechte Seite dann aber mit $2 \cdot q^2$ eine ungerade Anzahl von Primfaktoren hat, da 2 eine Primzahl ist, was somit zum Widerspruch führt.

Die Methode mit der Zählung der Primfaktoren führt beim "Beweis" der Irrationalität von $\sqrt{4}$ zu keinem Widerspruch, da $4 = 2 \cdot 2$ ist, also wieder eine gerade Anzahl von Primfaktoren auf beiden Seiten der Gleichung liefert.

Diese Methode läuft - wie auch Methode 3 - ganz anders ab als der Euklidische Beweis.

Sie hat aber den Vorteil, dass sie für die Wurzeln aus allen Primzahlen funktioniert. Denn ein dem usprünglichen Problem mit $\sqrt{2}$ ähnliches Problem, z.B. mit $\sqrt{3}$ oder $\sqrt{5}$, kann nicht mit einem dem Euklidschen Beweis analogen Beweis geführt werden.

Diese Methode setzt jedoch das Wissen über die Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung voraus. Beide Methoden sind sogar kürzer als der Euklidische Beweis.

Interessanterweise wird das Produkt zweier irrationaler Zahlen zwar i.A. wieder irrational sein (z.B. bei $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$), aber auch (seltener) rational (z.B. bei $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$).

B. Wurzel aus 4

Kann man nun analog dem Euklidischen Beweis von $\sqrt{2}$ ganz formal genauso folgern:
$\sqrt{4}$ ist irrational ?

Versuch des Beweises durch Widerspruch:
Angenommen $\sqrt{4}$ ist rational, das heißt, es gibt zwei positive ganze Zahlen p und q, wobei p und q wieder teilerfremd sein sollen, mit:

$$\sqrt{4} = \frac{p}{q}$$

Durch Quadrieren erhält man:

$$4 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$(5) \qquad 4 \cdot q^2 = p^2$$

Die linke Seite ($4 \cdot q^2$) ist ein Vielfaches von 4, also muss auch die rechte Seite ein Vielfaches von 4 sein. Das erreicht man schon dadurch, dass p ein Vielfaches von 2 (und nicht von 4) ist, z.B. mit einer positiven ganzen Zahl m:

$$(6) \qquad p = 2 \cdot m \quad \rightarrow \quad p^2 = 4 \cdot m^2$$

In Gleichung (5) eingesetzt und dann gekürzt folgt:

$$4 \cdot q^2 = 4 \cdot m^2 \quad \rightarrow \quad q^2 = m^2$$

Daraus folgt, da p und q und auch m positiv sind:

$$(7) \qquad q = m$$

Aus den Gleichungen (6) und (7) erkennt man, dass p und q nicht teilerfremd sind, da sie den gemeinsamen Faktor m haben:

$$(8) \qquad \sqrt{4} = \frac{p}{q} = \frac{2 \cdot m}{m} = \frac{2}{1} = 2$$

Da hier der Faktor m gekürzt werden kann, sieht das (eigentlich) als ein Widerspruch zu der Annahme aus, dass $\sqrt{4} = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden p und q sein soll. Also wäre demnach $\sqrt{4}$ irrational.
Andererseits hat man aus der gleichen Gleichung mit $\sqrt{4} = 2$ eine rationale Lösung hergeleitet, die ja auch offensichtlich richtig ist.

Dieses Dilemma kann man nur durch eine andere Argumentation lösen:
Da p und q teilerfremd sein sollen, muss man aus den Gleichungen (6) und (7) folgern, dass $m = 1$ sein muss, da 1 kein Teiler ist. Damit ergibt sich kein Widerspruch. Also ist $\sqrt{4}$ rational.

Es kann doch nicht sein, dass man mit der Euklidischen Methode mit der Voraussetzung der Teilerfremdheit die Irrationalität von $\sqrt{2}$ zwar richtig herleiten kann, die gleiche Methode bei $\sqrt{4}$ aber problematisch ist. Es bleibt ein ungutes Gefühl...

C. e ist irrational

Die Eulersche Konstante e ist definiert durch:

$$(9) \qquad e \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \;=\; \frac{1}{0!} \;+\; \frac{1}{1!} \;+\; \frac{1}{2!} \;+\; \frac{1}{3!} \;+\; \ldots$$

Dabei ist $0! = 1$, $n! = n \cdot (n-1)!$ (rekursive Definition).
Beachte: e ist nicht ganzzahlig, da aus Gleichung (9) folgt: $2 < e < 3$

Eine andere Definition (Zinseszinsrechnung) ist:

$$e \;=\; \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Behauptung: e **ist irrational.**

Leonhard Euler bewies 1737 die Aussage durch eine Kettenbruchentwicklung von e.
Kettenbruch für e:

$$e \;=\; 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}}$$

Der folgende Beweis entspricht dem von Joseph Fourier (um 1815).

Beweis durch Widerspruch mit der Definition nach Gleichung (9):
Angenommen e ist rational, das heißt, es gibt zwei positive ganze Zahlen p und q, wobei $q > 1$ gelten soll, mit:

$$e \;=\; \frac{p}{q}$$

Man definiert eine Zahl N durch:

$$(10) \qquad N \;:=\; q! \cdot (e \;-\; \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!})$$

Dann gilt für N mit der Definition von e nach Gleichung (9):

$$(11) \qquad N \;=\; q! \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \;-\; \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}) \;=\; \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!}$$

Nimmt man Gleichung (10) und setzt die Annahme $e = \frac{p}{q}$ ein, klammert aus und benutzt $q! = (q-1)! \cdot q$, folgt:

$$N \;=\; q! \cdot \frac{p}{q} \;-\; \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \;=\; (q-1)! \cdot p \;-\; \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}$$

Der erste Term ist offensichtlich ganzzahlig und der zweite Term wegen $k \leq q$ ebenfalls ganzzahlig, somit ist auch N **ganzzahlig** und gleichzeitig größer als 0.

Nun kann man mit Gleichung (11) schreiben:

$$0 \ < \ N \ = \ \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!} \ = \ \frac{q!}{(q+1)!} \ + \ \frac{q!}{(q+2)!} \ + \ \frac{q!}{(q+3)!} \ + \ \ldots$$

Kürzt man alle $q!$ heraus, folgt:

$$(12) \qquad 0 \ < \ N \ = \ \frac{1}{(q+1)} \ + \ \frac{1}{(q+1)(q+2)} \ + \ \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} \ + \ \ldots$$

Es gilt aber wegen $q > 1$ (es genügt aber auch $q \geq 1$):

$$\frac{1}{q+1} < \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{q+2} < \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{q+3} < \frac{1}{2}, \qquad \ldots$$

Damit kann man nach Gleichung (12) einfach nach oben abschätzen:

$$\begin{aligned} 0 \ < \ N \ &= \ \frac{1}{(q+1)} \ + \ \frac{1}{(q+1)(q+2)} \ + \ \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} \ + \ \ldots \\ &< \ \frac{1}{2} \ + \ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \ + \ \left(\frac{1}{2}\right)^3 \ + \ \ldots \end{aligned}$$

Wegen der (nach Ausmultiplizieren offensichtlichen) Beziehung

$$(1-a) \cdot (1 + a + a^2 + a^3 + \ldots) \ = \ 1$$

folgt nach Umformung die Formel der geometrischen Reihe:

$$(13) \qquad a + a^2 + a^3 + \ldots \ = \ \frac{1}{1-a} - 1$$

Aus der Beziehung (13) folgt dann mit $a = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} \ + \ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \ + \ \left(\frac{1}{2}\right)^3 \ + \ \ldots \ = \ \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 \ = \ 1$$

und insgesamt folgt somit der Widerspruch dazu, dass N ganzzahlig ist.

$$0 \ < \ N \ < \ \frac{1}{2} \ + \ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \ + \ \left(\frac{1}{2}\right)^3 \ + \ \ldots \ = \ 1$$

Also ist e irrational.

D. π ist irrational

Die Kreiszahl π (Ludolfsche Zahl) ist definiert durch das Verhältnis des Umfangs eines Kreises zu seinem Durchmesser.

Es gibt verschiedene Formeln zur Berechnung von π, z.B. (nach Gottfried W. Leibniz über $\arctan(1) = \pi/4$) die sehr langsam konvergierende Summe:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Etwa gleich langsam konvergierend (4 Dezimalstellen nach 100000 Summanden) ist (nach Leonhard Euler, 1739):

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$$

und etwas schneller konvergierend (15 Dezimalstellen nach 100000 Summanden):

$$\frac{\pi^4}{90} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{256} + \ldots$$

Definition durch ein (langsam konvergierendes) Produkt (nach Wallis, 1655):

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \ldots}$$

Oder auch:

Definition durch ein Integral (nach Karl Weierstraß):

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Alle diese Formeln eignen sich nicht so gut zum Beweis der Irrationalität von π. Der erste Beweis von Johann H. Lambert von 1761 benutzte die Kettenbruchentwicklung von $\tan(1)$.

Kettenbruch für $\tan(x)$:

$$\tan(x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{\ddots}}}}}$$

In vielen späteren Beweisen wird eine Funktion benutzt, die π oder die sin- bzw. cos-Funktion enthält - bei denen π eine Rolle spielt - oder ein Integral, das π in den Grenzen enthält. Ivan Niven hat 1947 einen relativ einfachen und eleganten Beweis erbracht.

Behauptung: π **ist irrational.**

Beweis durch Widerspruch nach Ivan Niven (1947). Einen ähnlichen Beweis beschrieb Nicolas Bourbaki (1949).

Annahme: $\pi = \frac{a}{b}$ mit positiven ganzzahligen a und b mit $b \neq 0$.

Beweis-Idee:
Es werden zwei Funktionen $f(x)$ (Gleichung (14)) und $F(x)$ (Gleichung (16)) definiert.
Dann zeigt man durch Analyse der Ableitungen von $f(x)$, dass $F(0)$ und $F(\pi)$ positive ganze Zahlen sind.
Zuletzt wird ein Integral über $f(x) \cdot \sin(x)$ (Gleichung (18)) definiert, dass nach oben mit 1 abgeschätzt werden kann.
Insgesamt ergibt sich ein Widerspruch dazu, dass $F(0)$ und $F(\pi)$ zwar ganzzahlig, aber deren Summe auch zwischen 0 und 1 liegen soll.

Beweis:
Definiere nun für jede positive ganze Zahl n eine polynomiale Funktion mit reellem x und mit Exponenten in x zwischen n und $2n$ durch:

$$(14) \qquad f(x) \ := \ \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$$

Setzt man die Annahme $\pi = \frac{a}{b}$ ein, folgt:

$$(15) \qquad f(x) \ = \ \frac{x^n \cdot b^n(\pi - x)^n}{n!}$$

Definiere eine zweite Funktion mit reellem x durch die alternierende Summe aller geraden Ableitungen von $f(x)$:

$$(16) \qquad F(x) \ := \ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(2k)}(x) \ = \ f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \ldots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$$

Dabei bedeutet $f^{(k)}(x)$ die k-te Ableitung von $f(x)$.

Zuerst zeigt man: $F(0)$ und $F(\pi)$ sind ganzzahlig.

Multipliziert man die Gleichung (14) aus, erhält man nach der Binomischen Formel ein Polynom in x bis zum Grad $2n$:

$$f(x) \ = \ \frac{1}{n!} \cdot \sum_{m=0}^{n}(-1)^m \binom{n}{m} a^{n-m} \ b^m \ x^{n+m}$$

Die k-ten Ableitungen von $f(x)$ sind ebenfalls Polynome in x bis zum Grad $2n-k$.

$$f^{(k)}(x) \ = \frac{1}{n!} \sum_{m=max(0,k-n)}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} \ (n+m-k+1)\ldots(n+m) \ a^{n-m} \ b^m \ x^{n+m-k}$$

Für $k < n$ haben alle Glieder Exponenten zwischen $n-k$ und $2n-k$. Daher sind die Exponenten von x immer größer als 0, die Funktionswerte verschwinden also für $x = 0$.

Für $k = n$ entsteht bei $m = 0$ der (erste) konstante Term mit $\frac{n!}{n!} \cdot a^n$, d.h. $f^{(n)}(0)$ ist wegen dem ganzzahligen a auch ganzzahlig, da auch alle höheren Potenzen wieder für $x = 0$ verschwinden.

Für $k > n$ entsteht jeweils mit $m = k-n$ ein konstanter Term von $\frac{k!}{n!} \cdot \binom{n}{k-n} a^{2n-k} b^{k-n}$ bis zu $\frac{(2n)!}{n!} \cdot b^n$ (bei $k = 2n$), wobei alle anderen Glieder positive Exponenten in x haben, die bei $x = 0$ wieder verschwinden. Wegen $k > n$ ist der Faktor $\frac{k!}{n!}$ immer ganzzahlig, der Binomialkoeffizient und auch a und b ebenfalls, also sind alle Ableitungen von $f(x)$ bei $x = 0$ ganzzahlig.

Damit ist auch - wegen Gleichung (16) - $F(0)$ **ganzzahlig**.

Wegen der Annahme $\pi = \frac{a}{b}$ gilt - siehe Gleichung (15) - für $f(x)$ und alle Ableitungen, da $f(x)$ eine symmetrische Funktion ist und wegen der Kettenregel:

$$f(x) \;=\; f(\pi - x) \quad \text{und} \quad f^{(k)}(x) \;=\; (-1)^k f^{(k)}(\pi - x)$$

Das heißt, dass $F(\pi) = F(0)$ gilt, also ist auch $F(\pi)$ **ganzzahlig**.

Bildet man nun die zweite Ableitung von $F(x)$ und summiert dazu die Terme von $F(x)$, folgt wegen dem Verschwinden von $f^{(2n+2)}(x)$:

$$(17) \qquad F''(x) + F(x) \;=\; f(x)$$

Die Ableitung der Summenfunktion:

$$G(x) \;:=\; F'(x)\sin(x) - F(x)\cos(x)$$

ist wegen der Produktregel $(g(x)h(x))' = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$, und wegen $\sin'(x) = \cos(x)$ und $\cos'(x) = -\sin(x)$, und wegen Gleichung (17):

$$\begin{aligned} G'(x) &= (F''(x)\sin(x) + F'(x)\cos(x)) - (F'(x)\cos(x) - F(x)\sin(x)) \\ &= F''(x)\sin(x) + F(x)\sin(x) \;=\; (F''(x) + F(x)) \cdot \sin(x) \;=\; f(x)\sin(x) \end{aligned}$$

Damit ist $G(x)$ die Stammfunktion von $f(x)\sin(x)$.

Für das bestimmte Integral gilt daher nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und wegen $\sin(\pi) = \sin(0) = 0$ und $cos(\pi) = -1, \cos(0) = 1$:

$$(18) \qquad \int_0^\pi f(x)\ \sin(x)\ dx \;=\; [G(x)]_0^\pi \;=\; \left[F'(x)\sin(x) - F(x)\cos(x)\right]_0^\pi \;=\; F(\pi) + F(0)$$

Also ist das Integral ganzzahlig. Andererseits gilt nach Gleichung (15) für $0 < x < \pi$:

$$f(x) > 0 \quad \text{und} \quad \sin(x) > 0$$

Damit ist das Integral positiv und es folgt, dass die Summe $F(0) + F(\pi)$ eine positive ganze Zahl ist.

Untersucht man nach Gleichung (14) den Ausdruck $x(a - bx)$, so liegt das Maximum der Funktion wegen der Symmetrie in der Mitte bei $x = \frac{a}{2b} = \frac{\pi}{2}$, d.h.

$$\frac{\pi}{2}\left(a - b\frac{\pi}{2}\right) \;=\; \frac{\pi b}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) \;=\; \frac{a}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \;=\; \frac{a\pi}{4}$$

Im Intervall $0 \le x \le \pi$ gilt daher:

$$0 \le x(a - bx) \le \frac{a\pi}{4} \quad \text{und} \quad 0 \le \sin(x) \le 1$$

Damit folgt aus der Definition von $f(x)$:

$$\int_0^\pi f(x)\ \sin(x)\ dx \;\le\; \int_0^\pi \frac{(a\pi)^n}{4^n \cdot n!}\ dx \;=\; \pi \cdot \frac{(a\pi)^n}{4^n \cdot n!}$$

Für genügend großes n, da $n!$ sehr stark wächst (siehe Gleichung (20)) und damit $\pi \cdot (a\pi)^n < 4^n \cdot n!$ wird, wird die rechte Seite der Gleichung kleiner als 1.

Das bedeutet insgesamt:

$$\text{(19)} \qquad \int_0^\pi f(x)\ \sin(x)\ dx \;=\; F(0) + F(\pi) \;\le\; \pi \cdot \frac{(a\pi)^n}{4^n \cdot n!} \;<\; 1$$

Das ist ein Widerspruch, da gezeigt wurde, dass die Summe $F(0) + F(\pi)$ eine positive ganze Zahl ist:

$$0 \;<\; F(0) + F(\pi) \;<\; 1$$

Damit kann π nicht $\frac{a}{b}$ sein.

PS: Nach der Stirlingschen Formel für $n \to \infty$ (nach James Stirling, 1730)

$$\text{(20)} \qquad n! \;\sim\; \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

kann man die Größenordnung von n abschätzen (immer n genügend groß vorausgesetzt):

$$\pi \cdot \frac{(a\pi)^n}{4^n \cdot n!} \;\sim\; \pi \cdot \frac{(a\pi e)^n}{4^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot n^n} \;=\; \frac{\pi}{\sqrt{2\pi n}} \cdot \left(\frac{a\pi e}{4n}\right)^n$$

Damit der Ausdruck in Gleichung (19) kleiner als 1 werden kann, muss mindestens gelten:

$$\left(\frac{a\pi e}{4n}\right) < 1 \quad \to \quad \frac{a\pi e}{4} < n$$

Also:

$$n > \frac{\pi e}{4} \cdot a \;\approx\; 2.135 \cdot a$$

Mit z.B. $n = 3a$ ist die Ungleichung (19) daher immer erfüllt.

PS: Verschiedene ausführlich dargestellte Beweise findet man unter
`https://en.wikipedia.org/wiki/Proof_that_pi_is_irrational`

PS: Mehrere Methoden zur Berechnung von π findet man unter
`https://www.sarahandrobin.com/ingo/pi-berechnung.pdf`

MacTeX 2020/pdflatex → https://www.sarahandrobin.com/ingo/irrationale-zahlen.pdf,
https://www.sarahandrobin.com/ingo/index.html