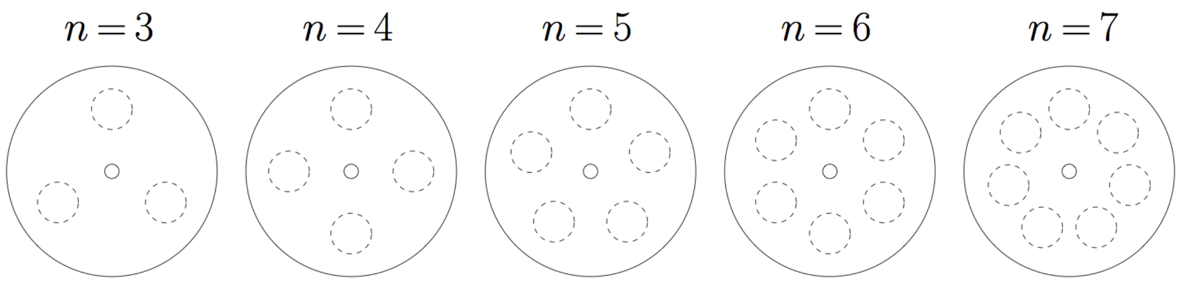
Das Plattenspiel

Ingolf Giese

Juli 2018

Das Plattenspiel ist ein leider wenig bekanntes Geduldsspiel mit p runden Platten (oder Scheiben) und s Stiften (oder Stangen). Die Platten haben n nahe dem Rand gleichmäßig verteilte Positionen, an denen Löcher sein können, durch die die Stifte passen. Zu einem Spiel muss jeder Plattentyp - siehe (*) - genau ein Mal dabei sein. Alle Stifte müssen so in die Platten gesteckt werden, dass am Ende alle Platten und alle Stifte benutzt sind und keine Stifte aus der obersten Platte herausragen. Alle Stifte haben die Länge l, wobei l ein ganzzahliges Vielfaches (und mindestens das Zweifache) der Dicke einer Platte sein muss, wobei l aber auch kleiner als die Plattenanzahl p sein muss.

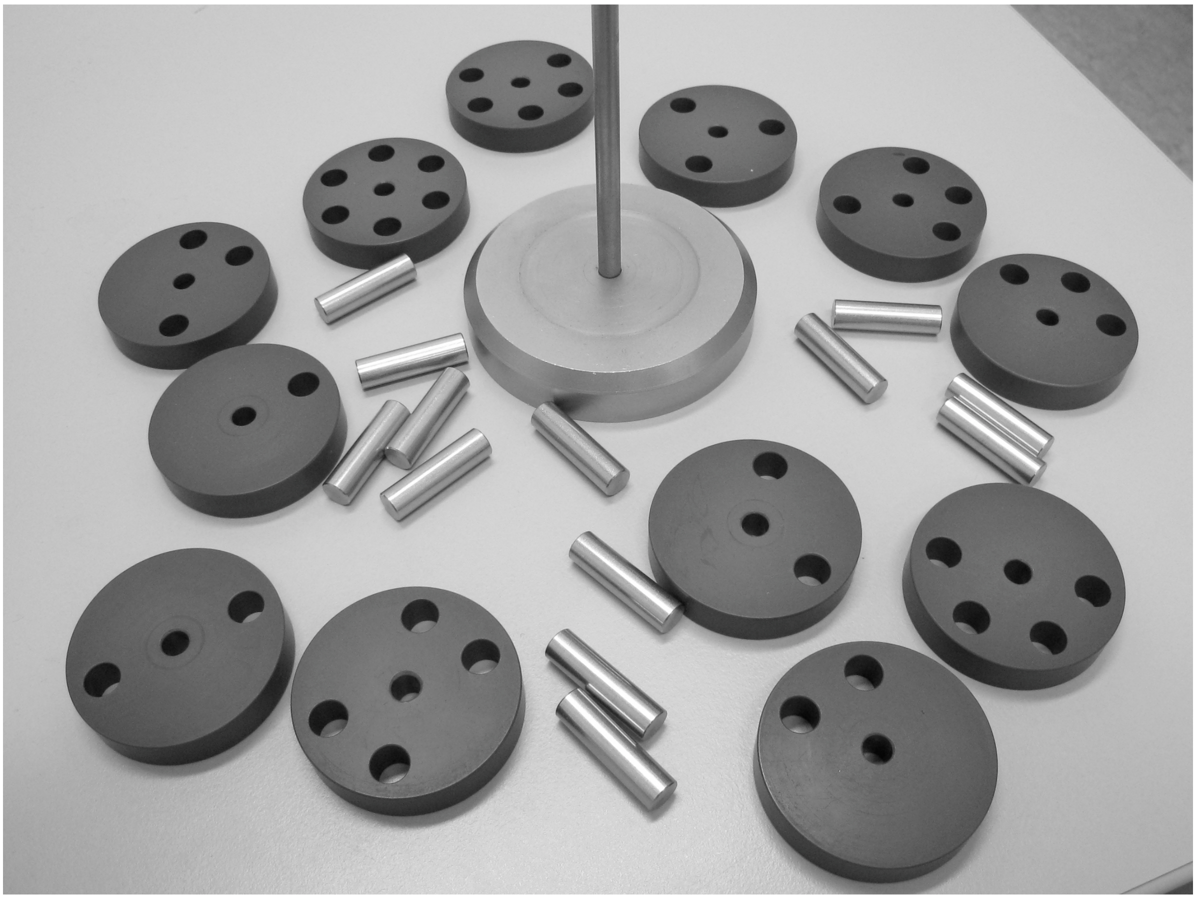
Die Platten haben in der Mitte ein Führungsloch; sie werden in zu findender Reihenfolge auf eine Grundplatte ohne Löcher (mit einer Führungsstange) gesteckt. Hier werden die wohl sinnvollsten Plattenspiele mit n Lochpositionen untersucht: $3 \leq n \leq 7$. Das triviale Plattenspiel mit 2 Lochpositionen ist nicht möglich: Es gibt genau 2 verschiedene Platten (mit 1 Loch und mit 2 Löchern), und bei 2 Stiften mit der Länge 2 ragt aber der zweite Stift immer aus der obersten Platte heraus ($1 + 2 = 3$, aber $2 + 2 = 4$).



Es gibt zwei Spielarten: Bei der strengen Version dürfen sich Stifte, die an der gleichen Lochposition sind, nicht berühren - es muss also immer mindestens eine Platte dazwischen liegen. Bei der nicht-strengen (freien) Version dürfen sich die Stifte berühren, was aber zu einer höheren Anzahl von Möglichkeiten und Lösungen führt.

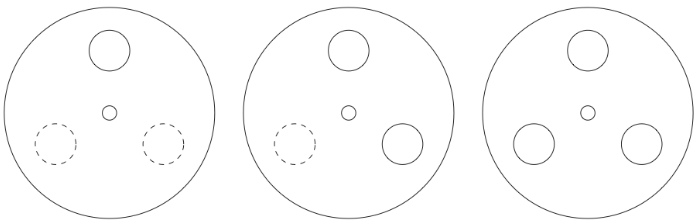
(*) Die verschiedenen Typen einer Platte sind alle untereinander verschiedenen Platten mit allen Anordnungen von 1 bis n Löchern. Dabei wird eine umgedrehte (gewendete) Platte, die ein anderes Verteilungsmuster liefert, nicht als verschiedene Platte gezählt. Auch (waagrechte) Drehungen einer Platte erzeugen keinen anderen Typ. Da man auch einen fertigen Plattenstapel umdrehen kann, wird in allen folgenden Ergebnissen immer nur die Form, bei der die Platte mit 1 Loch unter der mit allen Löchern liegt, benutzt.

Zum besseren Verständnis zeigt das folgende Foto alle 12 Plattentypen der Platten mit 6 Lochpositionen mit allen 13 Stiften der Länge 3. Die Platte in der Mitte ganz links mit den 3 Löchern ist die einzige unsymmetrische Platte; sie wird nur ein Mal benutzt.



A. Platten mit 3 Lochpositionen

In diesem Fall gibt es 3 unterschiedliche Platten: Eine Platte mit 1 Loch, eine mit 2 Löchern, und eine mit drei Löchern. Die Gesamtzahl aller Löcher aller Platten ist somit: $1 + 2 + 3 = 6$.

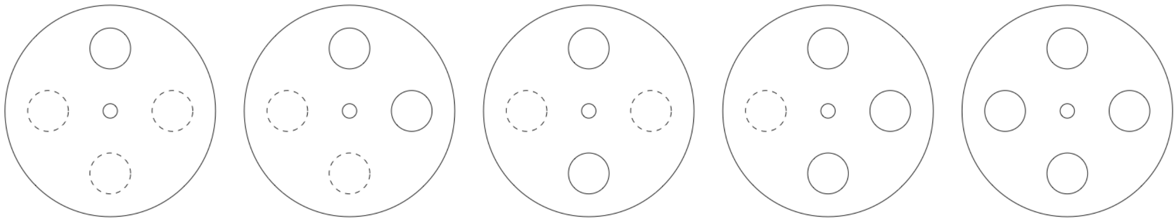


Die Zahl 6 ist zerlegbar in $2 \cdot 3$. Das bedeutet, dass als Stiftlänge l nur 2 (aber 3 nicht, da $l < p = 3$ sein muss) in Frage kommt. Damit gibt es genau eine Lösung:

Auf die unterste Platte mit 1 Loch (und einem Stift) legt man die Platte mit 3 Löchern (und 2 neuen Stiften) und zuletzt die Platte mit 2 Löchern, aber um eine Einheit - hier also 1/3 Vollkreis - gedreht. Das wäre ein extrem langweiliges Spiel.

B. Platten mit 4 Lochpositionen

In diesem Fall gibt es 5 unterschiedliche Platten. Die Gesamtzahl aller Löcher aller Platten ist: $1 + 2 \cdot 2 + 3 + 4 = 12$.



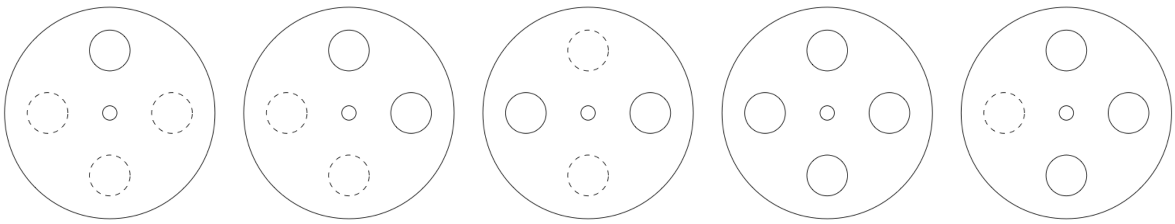
Die Zahl 12 ist zerlegbar in $2 \cdot 2 \cdot 3$. Das bedeutet, dass die Stiftlänge l sowohl 2 (mit dann $12/2 = 6$ Stiften) als auch 3 (mit $12/3 = 4$ Stiften) sein kann.

Die Stiftlänge 3 führt aber zu keiner Lösung: Da die Platte mit den 4 Löchern nicht am Rand sein kann, müssen mindestens ein Stift an dieser Platte enden und ein anderer in einem anderen Loch anfangen. Die prinzipiellen Arten der Stifte-Verteilungen sieht man in der folgenden Tabelle, wobei x Teil eines Stiftes ist und "-" kein Stift darstellt.

Die 4 Zeilen des Stifte-Schemas sind die 4 Lochpositionen, die 5 Spalten sind die Platten, die also senkrecht zu lesen sind: Die 3. Spalte ist daher die Platte mit allen 4 Löchern. Alle Reihen und Spalten (außer der 3. Spalte) sind beliebig vertauschbar, was aber an der Nicht-Lösbarkeit nichts ändert, denn in allen Fällen würde immer die gleiche Platte mit 2 Löchern zwei Mal benutzt werden (im linken Schema die Platte mit den beiden Löchern nebeneinander, im rechten Schema die Platte mit den beiden Löchern gegenüber):

x	x	x	-	-	bzw.	x	x	x	-	-
-	x	x	x	-		-	-	x	x	x
-	-	x	x	x		-	x	x	x	-
-	-	x	x	x		-	-	x	x	x

Die Stiftlänge 2 führt aber nur zu Lösungen im nicht-strengen Fall, zum Beispiel:



Das Stifte-Schema ist dabei:

x	x	-	x	x
-	x	x	x	x
-	-	-	x	x
-	-	x	x	-

Hier wurden alle 5 Plattentypen benutzt (die dritte Platte ist hier um eine Einheit - hier also 1/4 Vollkreis - gedreht), aber in der zweiten Zeile sieht man, dass sich zwei Stifte berühren - was man auch an dem Bild erkennen kann, weil die Platten 2 bis 5 alle rechts einen Stift haben.

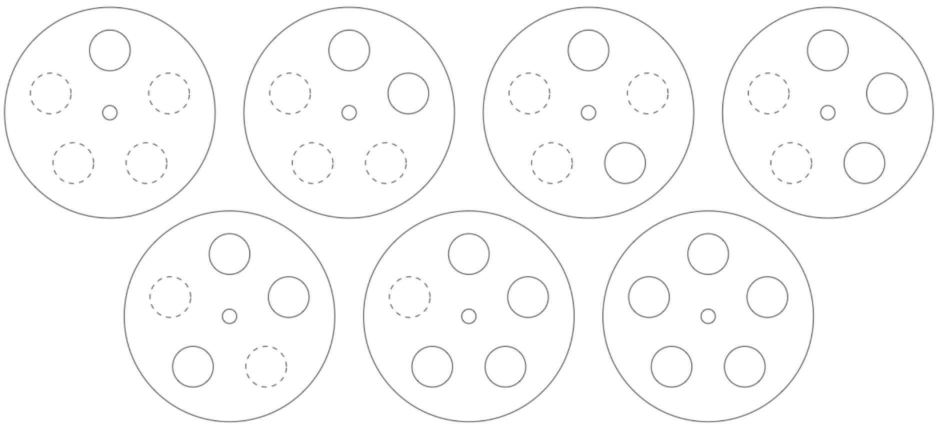
Die verschiedenen Plattenspiele wurden auch für Computer programmiert, wobei alle Anordnungen der Platten (durch geschachtelte Laufschleifen) durchgerechnet werden und dabei eine neue Platte auf den aktuellen Stapel nur dann gelegt wird, wenn sie (eventuell erst durch Verdrehung) auch auf die aktuelle Stifteverteilung passt. Kommt man dabei nicht zu einem Ergebnis, muss der aktuelle Stapel wieder plattenweise abgebaut werden. Das können dann sehr viele Versuche sein.

Das Programm für 4 Lochpositionen zeigt dann, dass es - aber nur für die nicht-strenge Version - insgesamt 8 unterschiedliche Lösungen gibt, wobei die erwähnten Symmetrien (Wenden von Platten, Umdrehen oder Drehen des ganzen Stapels) nicht mitgezählt werden. Das Drehen des ganzen Stapels wird dabei dadurch verhindert, dass die Platte mit 1 Loch dieses immer "oben" haben soll.

Insgesamt gesehen ist das 4er-Plattenspiel auch nicht sehr interessant, zeigt aber einige Prinzipien dieser Spiele auf.

C. Platten mit 5 Lochpositionen

In diesem Fall gibt es 7 unterschiedliche Platten. Die Gesamtzahl aller Löcher aller Platten ist: $1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 + 5 = 20$.



Die Zahl 20 ist zerlegbar in $2 \cdot 2 \cdot 5$. Das bedeutet, dass die Stiftlänge l sowohl 2 (mit dann $20/2 = 10$ Stiften) als auch 4 (mit $20/4 = 5$ Stiften) sein kann.

Eine erste Abschätzung, wie viele Möglichkeiten es (maximal) geben kann, erzielt man durch das Produkt der Anzahl der jeweils noch zur Verfügung stehenden Platten (erster Term) und den jeweils 5 Möglichkeiten, eine Platte zu drehen:
$(7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \ \cdot \ (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 7! \cdot 5^7 = 5040 \cdot 78125 = 393750000$

Berücksichtigt man die (nicht zu benutzenden) Symmetrien, kann man den ersten Term halbieren (Umdrehen des ganzen Stapels) und im zweiten Term berücksichtigen, dass die Platte mit 1 Loch nicht gedreht werden soll und die Platte mit 5 Löchern bei Drehungen keine andere Form ergibt, also insgesamt:
$1/2 \cdot (7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \ \cdot \ (1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1) = 1/2 \cdot 7! \cdot 5^5 = 2520 \cdot 3125 = 7875000$

Die Stiftlänge spielt bei dieser Abschätzungsmethode keine Rolle, d.h. die Anzahl der Möglichkeiten wird wohl weit überschätzt sein. Zusätzlich sind auch die Verteilungen der Stifte nicht berücksichtigbar.

Dafür braucht man einen anderen Ansatz. Dazu hilft das im Abschnitt "Platten mit 4 Lochpositionen" schon dargestellte Stifte-Schema: Bei der Stiftlänge 2 stellt man fest, dass pro Reihe (in diesem Schema) - also pro Lochposition - genau 2 Stifte verteilt sein müssen, denn es gibt 5 Reihen, die 10 Stifte aufnehmen müssen. Das führt zu 6 möglichen Verteilungen in der strengen Version, die hier sortiert dargestellt werden:

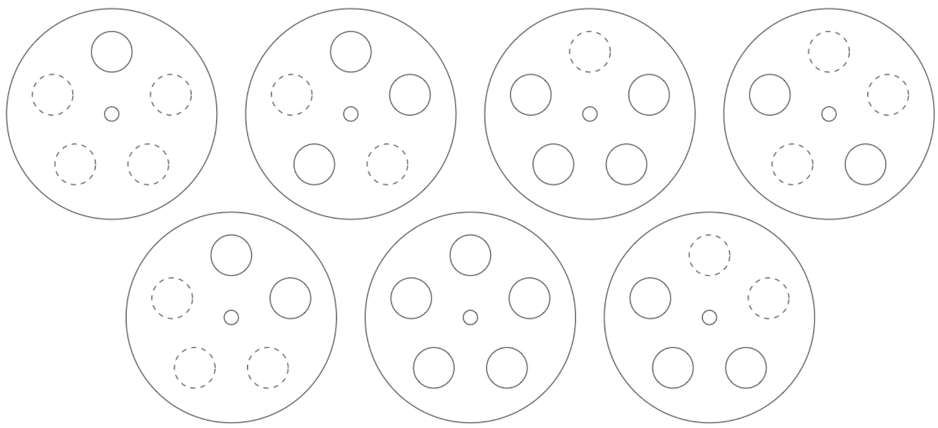
x	x	-	x	x	-	-
x	x	-	-	x	x	-
x	x	-	-	-	x	x
-	x	x	-	x	x	-
-	x	x	-	-	x	x
-	-	x	x	-	x	x

Daraus kann man ableiten, dass es für jede der 5 Lochpositionen eine der 6 dargestellten Möglichkeiten gibt, also insgesamt:
$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5 = 7776$ Platten-Verteilungen.

Die Symmetrie durch Umdrehen des ganzen Stapels berücksichtigt man wieder durch Halbieren der Anzahl zu damit 3888 Möglichkeiten. Bei der Stifte-Abschätzungsmethode wird jedoch die Verteilung der Platten nicht berücksichtigt. Trotzdem ist dies eine wesentlich bessere Abschätzung der Möglichkeiten, die Platten und Stifte anzuordnen.

Computer-Rechnungen zeigen in der strengen Version bei der Stiftlänge 2 immerhin 62 Lösungen, wobei 1950 Mal eine (virtuelle) Platte in die "Hand" genommen und passend auf den aktuellen Plattenstapel gelegt wurde (Plattenbewegungen), sie aber in den meisten Fällen wieder zurückgelegt werden musste (was nicht gezählt wurde).
In der nicht-strengen Version sind es bei der Stiftlänge 2 aber schon 1572 Lösungen.

Eine "schöne" (d.h. mit wenig Drehungen) Lösung bei Stiftlänge 2 in der strengen Version ist die folgende:



Interessant ist, dass die Platte mit allen 5 Löchern immer an zweitletzter Stelle liegt. Auch taucht die Verteilung der ersten Zeile des obigen Stifte-Schemas in der Praxis gar nicht auf.

Bei der Stiftlänge 4 gibt es nur 4 Möglichkeiten, die Stifte anzuordnen, weil immer nur 1 Stift pro Reihe sein kann, also:

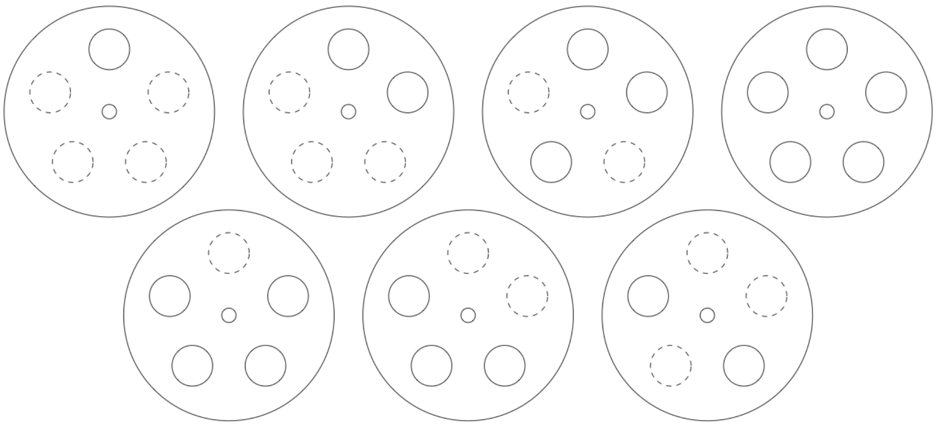
```
x x x x - - -
- x x x x - -
- - x x x x -
- - - x x x x
```

Damit findet man für die maximale Anzahl von Kombinationsmöglichkeiten:
$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5 = 1024$, bzw. nach Halbieren 512 Möglichkeiten.

Bei dieser Stiftlänge findet man nur 4 Lösungen, wobei 335 Mal eine (virtuelle) Platte in die "Hand" genommen und passend auf den aktuellen Plattenstapel gelegt werden musste. Dabei ist es erstaunlich, dass es überhaupt Lösungen gibt, da relativ lange Stifte immer problematisch sind ($l = p$ ist sogar unmöglich), wie auch die Analysen der Spiele bei 3 und 4 Lochpositionen zeigen.

In der nicht-strengen Version sind es genau die gleichen 4 Lösungen wie in der strengen Version.

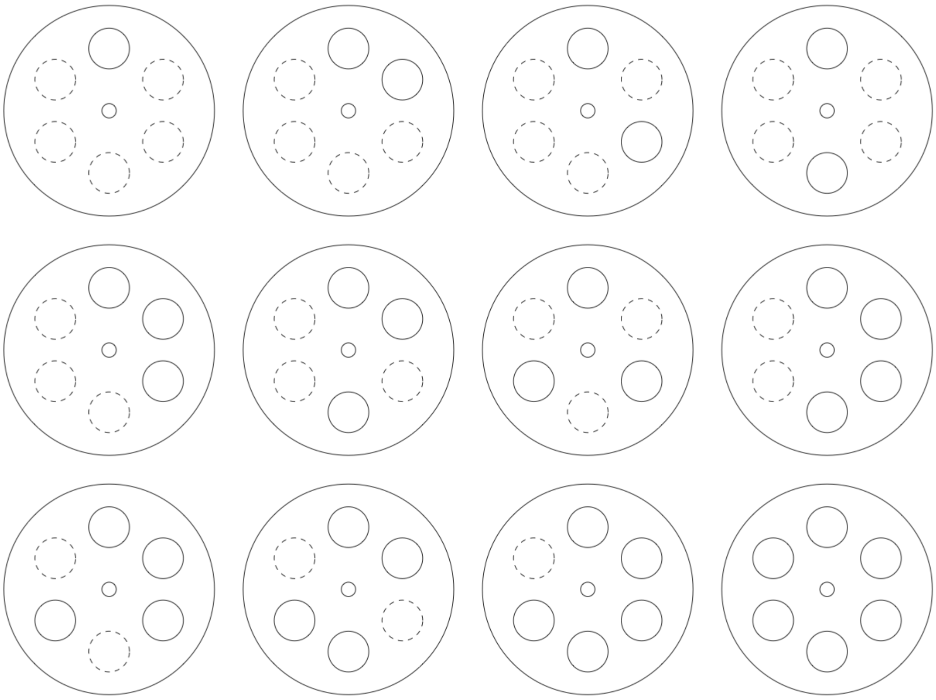
Eine "schöne" Lösung bei Stiftlänge 4:



Übrigens kann das Computer-Programm auch so geschrieben werden, dass man - statt die Platten in allen Anordnungen zusammen zu setzen - die verschiedenen Verteilungen der Stifte in entsprechenden geschachtelten Laufschleifen durchrechnet. Bei jeder Kombination muss dann geprüft werden, ob es dazu passende und auch immer untereinander verschiedene Platten gibt, um eine Lösung zu bekommen. Erstaunlicherweise war bei der benutzten Implementation das Programm nicht schneller als dasjenige, das die Platten kombiniert, aber es kamen (natürlich in einer anderen Reihenfolge) die gleichen Lösungen in gleicher Anzahl heraus.

D. Platten mit 6 Lochpositionen

In diesem Fall gibt es 12 unterschiedliche Platten. Die Gesamtzahl aller Löcher aller Platten ist: $1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 5 + 6 = 39$.



Die Zahl 39 ist zerlegbar in $3 \cdot 13$. Das bedeutet, dass die Stiftlänge l nur 3 (mit dann $39/3 = 13$ Stiften) sein kann.

Eine erste Abschätzung, wie viele Möglichkeiten es (maximal) geben kann, erzielt man durch das Produkt der Anzahl der jeweils noch zur Verfügung stehenden Platten (erster Term, halbiert wegen der Symmetrie durch Nicht-Umdrehen des ganzen Stapels, d.h. Platte mit 1 Loch vor Platte mit 6 Löchern) und den jeweils bis zu 6 Möglichkeiten, eine Platte zu drehen, was aber bei 5 Platten zu geringeren Möglichkeiten (1 bzw. 2 bzw. 3) führt:
$(1/2 \cdot 12!) \ \cdot \ (6^7 \cdot 3^2 \cdot 2^1 \cdot 1^2) = 239500800 \cdot 5038848 = 1206808127078400 \approx 1.2 \cdot 10^{15}$

Wesentlich bessere Abschätzungen erhält man wieder mit dem Stifte-Schema: In der strengen Version gibt es pro Reihe 1, 2 oder 3 Möglichkeiten, Stifte zu verteilen.

Genauer findet man $\binom{10}{1} = 10$ Möglichkeiten, 1 Stift zu verteilen, aber $\binom{7}{2} = 21$ Fälle mit 2 Stiften, und $\binom{4}{3} = 4$ Fälle mit 3 Stiften. Insgesamt also 35 verschiedene Verteilungen. Das sind dann bei 6 Platten: $35^6 = 1838265625$ Möglichkeiten (1.8 Milliarden), und damit wesentlich weniger als bei der Platten-Methode.

Das lässt sich sogar noch verbessern, wenn man die Verteilungen genauer untersucht: Die 13 Stifte können auf 3 Arten verteilt werden, wobei die Anzahlen mit der Formel für Permutationen mit Wiederholung (Einzelheiten siehe Anhang) hergeleitet werden können:
Zum ersten pro Reihe mit 2 Mal 1 Stift, 1 Mal 2 Stifte und 3 Mal 3 Stifte (2+2+9=13):
Das sind $(6!)/(2! \cdot 1! \cdot 3!) = 60$ Möglichkeiten.
Zum zweiten pro Reihe mit 1 Mal 1 Stift, 3 Mal 2 Stifte und 2 Mal 3 Stifte (1+6+6=13):
Das sind $(6!)/(1! \cdot 3! \cdot 2!) = 60$ Möglichkeiten.
Zum dritten pro Reihe mit ohne 1 Stift, 5 Mal 2 Stifte und 1 Mal 3 Stifte(0+10+3=13):
Das sind $(6!)/(0! \cdot 5! \cdot 1!) = 6$ Möglichkeiten.

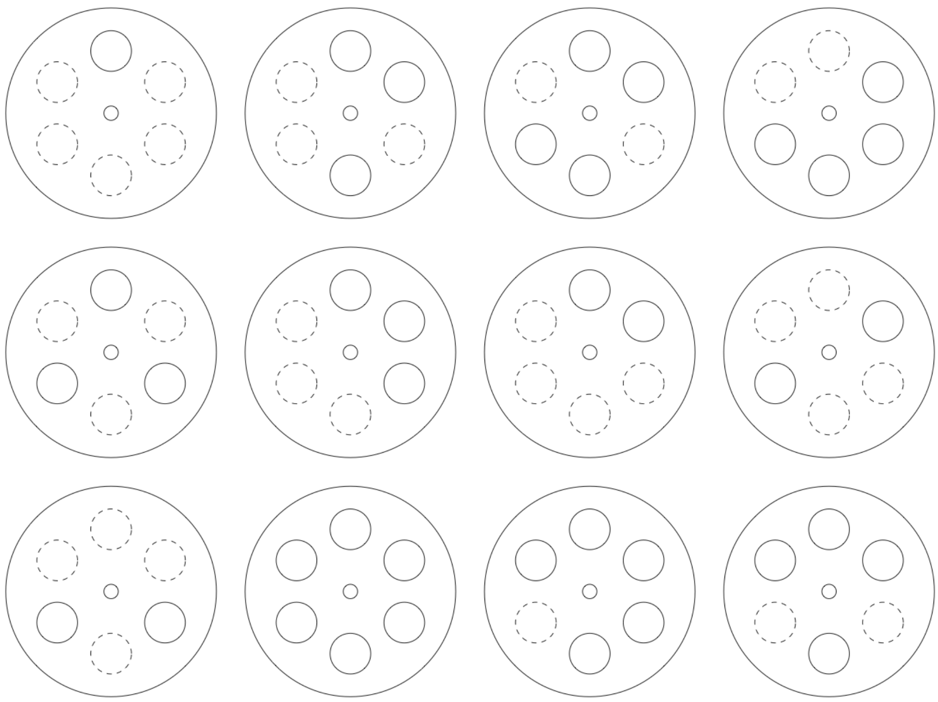
Insgesamt folgt damit: Für den ersten Fall: $(10 \cdot 10 \cdot 21 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4) \cdot 60 = 8064000$
Für den zweiten Fall: $(10 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 4 \cdot 4) \cdot 60 = 88905600$
Für den dritten Fall: $(21 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 4) \cdot 6 = 98018424$

Das sind in der Summe $8064000 + 88905600 + 98018424 = 194988024$ Möglichkeiten, die aber wieder (wegen der Symmetrie) halbiert werden kann zu $97494012 \approx 9.75 \cdot 10^7$. Das ist eine erstaunlich kleinere Zahl gegenüber der der Platten-Methode mit $1.2 \cdot 10^{15}$.

Computer-Rechnungen zeigen in der strengen Version 66 Lösungen, was gegenüber den 62 Lösungen des Spiels mit 5 Lochpositionen zuerst einmal wenig klingt, durch die größere Stiftlänge aber dann doch nicht verwundert. Es wurden dabei 230205 Mal eine (virtuelle) Platte in die "Hand" genommen und passend auf den aktuellen Plattenstapel gelegt, sie musste aber in den meisten Fällen wieder zurückgelegt werden. In allen Fällen liegt die Platte mit 1 Loch zuerst im Stapel, die Platte mit allen 6 Löchern ist immer an drittletzter Stelle, gefolgt von der Platte mit 5 Löchern.

In der nicht-strengen Version sind es 5247 Lösungen mit 2862561 Plattenbewegungen. Die Platten mit 1, 5 und 6 Löchern sind hier aber nicht so regelmäßig verteilt.

Eine "schöne" (also mit wenig Drehungen) Lösung:



E. Platten mit 7 Lochpositionen

In diesem Fall gibt es 17 unterschiedliche Platten. Die Gesamtzahl aller Löcher aller Platten ist: $1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 6 + 7 = 63$.
Die Zahl 63 ist zerlegbar in $3 \cdot 3 \cdot 7$. Das bedeutet, dass die Stiftlänge l nur 3 (mit dann $63/3 = 21$ Stiften) sein kann.

Eine erste Abschätzung, wie viele Möglichkeiten es (maximal) geben kann, erzielt man (analog obigen Spielen) durch das Produkt der Anzahl der jeweils noch zur Verfügung stehenden Platten und den jeweils bis zu 7 Möglichkeiten, eine Platte zu drehen, was aber bei 2 Platten nur zu 1 Möglichkeit führt:

$$\begin{aligned}(1/2 \cdot 17!) \ \cdot \ (7^{15} \cdot 1^2) &= 177843714048000 \cdot 4747561509943 \\ &= 844323971599594000779264000 \approx 8.4 \cdot 10^{26}\end{aligned}$$

Das sind einige Größenordnungen mehr als bei den Spielen mit 5 und 6 Lochpositionen.

Die Abschätzungen über die Stifte-Verteilungen liefern ebenfalls sehr große Zahlen: Es sind pro Reihe 1 bis 4 Stifte möglich mit insgesamt 180 verschiedenen Verteilungen (was hier nicht näher dargestellt wird). Daraus folgt die grobe Abschätzung von:
$180^7 = 6122200320000000 \approx 6.1 \cdot 10^{15}$ Möglichkeiten.

Eine genauere Analyse der unterschiedlichen Anordnungen ähnlich der bei den 6 Lochpositionen führt dann zu $182398086149832 \approx 1.8 \cdot 10^{14}$ möglichen Anordnungen, jedoch nicht viel besser als bei der groben Abschätzung, aber wesentlich mehr als die $\approx 9.75 \cdot 10^7$ Möglichkeiten bei dem Spiel mit 6 Lochpositionen mit der gleichen Stiftlänge.

Trotzdem ist es überraschend - im Vergleich zu den Platten mit 5 und 6 Lochpositionen: Dieses Spiel hat in der strengen Version 4612977 Lösungen - gerechnet in etwa 42.5 Stunden (!) CPU-Zeit (2014er MacBook Pro und php) gegenüber 5 Sekunden bei den Platten mit 6 Lochpositionen und 0.1 Sekunden bei 5 Lochpositionen. Dabei wurde knapp 5 Milliarden Mal eine (virtuelle) Platte in die "Hand" genommen und passend auf den aktuellen Plattenstapel gelegt, wobei diese aber in den meisten Fällen wieder zurückgelegt werden musste.

In der nicht-strengen Version kann man wahrscheinlich etwa 1000 Millionen Lösungen erwarten (das würden mindestens 3-4 Wochen Rechenzeit bedeuten)!

Damit sind beide Versionen dieses Plattenspiels aber etwas zu viel des Guten!

Fazit: Die Spiele mit den 5 möglichen Plattenpositionen (und der Stiftlänge 2) und mit den möglichen 6 Plattenpositionen sind sehr interessant, wobei das letztere wohl etwas herausfordernder zu spielen ist.
Also: Einfach basteln und spielen!

F. Anhang: Abzählende Kombinatorik

Die Abzählende Kombinatorik - als Teilgebiet der Kombinatorik (Diskrete Mathematik) - beschäftigt sich mit der Anzahl verschiedener Kombinationen von unterscheidbaren und nicht unterscheidbaren Objekten, wobei auch die Reihenfolge der Beobachtungen berücksichtigt werden kann. Danach werden 3 Klassen unterschieden:

a) Kombinationen	von k aus n Objekten	Reihenfolge wird nicht beachtet
b) Variationen	von k aus n Objekten	Reihenfolge wird beachtet
c) Permutationen	von n Objekten	Reihenfolge wird beachtet

Ein Beispiel für die Aufgaben der Abzählenden Kombinatorik ist die Anzahl der möglichen Lottozahlen. Dabei werden 6 von 49 unterscheidbaren Zahlen gezogen, aber die Reihenfolge (bei der Ziehung) spielt keine Rolle: Das ist also eine Kombination oder "ungeordnete Stichprobe". Da jede Zahl nur ein Mal auftreten kann, ist das eine Kombination "ohne Wiederholung".

Die Permutationen sind am einfachsten zu beschreiben:
Permutationen **ohne** Wiederholung: Die n Objekte sind alle unterscheidbar, wie zum Beispiel die Platten eines Plattenspiels. Benutzt man eine der p Platten, sind nur noch $p-1$ andere Platten übrig. Insgesamt hat man damit für die Anzahl der möglichen Anordnungen von n Objekten:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots \cdot 2 \cdot 1 \;=\; n!$$

Permutationen **mit** Wiederholung: Von den n Objekte sind nicht alle unterscheidbar, wie zum Beispiel die Stifte in einer Reihe des Stifte-Schemas. Man kann dann diese Objekte untereinander austauschen, ohne dass sich ein anderes Muster ergibt. Bei k von n gleichen Objekten erhält man dann, weil dabei $k!$ Anordnungen gleich sind, für die Anzahl der möglichen Anordnungen nur noch: $n! \;/\; k!$

Allgemeiner: Gibt es mehrere Gruppen von jeweils gleichen Objekten mit den Teilanzahlen k_1, k_2, k_3 usw., folgt entsprechend für die Gesamtzahl der Anordnungen:

$$n! \;/\; (k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ldots)$$

Das wurde bei der Berechnung der Möglichkeiten im Spiel mit 6 Lochpositionen bei den Stifteverteilungen von 1 bis 3 Stiften in einer Reihe benutzt (Seite 7).

Variationen **mit** Wiederholung: Von den n Objekten werden k Objekte ausgewählt, wobei die Reihenfolge beachtet wird. Das erste Objekt kann an n Positionen stehen, auch das zweite, dritte usw., also gilt bei den k Objekten für die Gesamtzahl der Möglichkeiten:

$$n \cdot n \cdot \ldots \cdot n \;=\; n^k$$

Das wurde zum Beispiel bei der Berechnung der Anzahlen benutzt, bei der die 6 möglichen Stifteverteilungen für jede der 5 Lochpositionen variiert wurde (Seite 5).

Bei einer Variation **ohne** Wiederholung sollen k von n Objekten auf k verfügbare Plätze platziert werden, wobei jedes Objekt nur höchstens einen Platz einnehmen darf. Es gibt für den ersten Platz n mögliche Objekte, für den zweiten Platz nur noch $(n-1)$ Objekte, usw., insgesamt also bei k Plätzen folgende Anzahl:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Kombinationen **ohne** Wiederholung: Jedes der k von n Objekten darf nur ein Mal benutzt werden, wobei die Reihenfolge nicht beachtet wird. Würde sie beachtet werden, wäre das eine Variation ohne Wiederholung mit $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ Möglichkeiten. Da diese k Objekte aber in der Anordnung keine Rolle spielen sollen, muss diese Anzahl durch $k!$ geteilt werden. Insgesamt erhält man dann für die Anzahl:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \;/\; k! \;=\; n! \;/\; ((n-k)! \cdot k!) \;=\; \binom{n}{k}$$

Für das Lottospiel sind das also $\binom{49}{6} = 49!/(6! \cdot 43!) = 13983816$ Möglichkeiten.

mactex-2016/pdflatex → http://www.sarahandrobin.com/ingo/das-plattenspiel.pdf, http://www.sarahandrobin.com/ingo/index.html