Algebraische Gleichungen

Ingolf Giese

April 2018/Oktober 2022

Es werden Gleichungen zweiten und dritten Grades behandelt. Dabei wird auch die Geschichte der Zahlen beleuchtet, insbesondere der imaginären Zahlen. Am Ende werden einige Formeln für das Wurzelziehen aus komplexen Zahlen kurz dargestellt.

A. Die p-q-Formel

Gleichung 2. Grades

(1) $\quad x^2 + px + q = 0 \quad$ aus $\quad ax^2 + bx + c = 0 \quad$ nach Division durch a

oder

(2) $\quad (x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$

Gesucht sind die beiden Lösungen von Gleichung (1): x_1 und x_2 (siehe Gleichung (2)).

Vorgehen: Man ergänzt die Gleichung (1) um einen Term ("Quadratische Ergänzung"), damit die 1. Binomische Formel $(x+d)^2 = x^2 + 2dx + d^2$ benutzt werden kann, also hier mit $2d = p$, d.h. $d = \frac{p}{2}$:

$$
\begin{aligned}
x^2 + px + q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= 0 \\
x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\
\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q
\end{aligned}
$$

Das kann man nun leicht durch Wurzelziehen auflösen und erhält:

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

(3) $$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Probe: Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt mit

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ x_2 &= -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \end{aligned}$$

sofort

$$-(x_1 + x_2) = -\left(-\frac{p}{2} + -\frac{p}{2}\right) = \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = p$$

und wegen der 3. Binomischen Formel $(y+z) \cdot (y-z) = y^2 - z^2$

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \\ &= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 \\ &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right) = q \end{aligned}$$

Damit hat man, was auch aus dem Vergleichen der Koeffizienten von (1) und (2) schon hervorgeht:

(4) $\quad x_1 + x_2 = -p$

(5) $\quad x_1 \cdot x_2 = q$

Das sind somit zwei sehr schnelle Methoden, um die Richtigkeit der Lösungen zu überprüfen.

Einsetz-Probe für x_1 in die Ausgangsgleichung (1):

$$\begin{aligned} x_1^2 + px_1 + q &= \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 + p \cdot \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) + q \\ &= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{p}{2}\right) \cdot \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} + \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 \\ &\qquad + p \cdot \left(-\frac{p}{2}\right) + p \cdot \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} + q \\ &= \frac{p^2}{4} - p \cdot \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q - \frac{p^2}{2} + p \cdot \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} + q \\ &= \frac{p^2}{4} + \frac{p^2}{4} - q - \frac{p^2}{2} + q \\ &= 2 \cdot \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} - q + q = 0 \end{aligned}$$

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ x_1 &= 1 + \sqrt{1+3} \;=\; 1+2 \;=\; 3 \\ x_2 &= 1 - \sqrt{1+3} \;=\; 1-2 \;=\; -1 \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} (x-x_1)\cdot(x-x_2) &= (x-3)(x+1) \;=\; x^2 + (-3+1)x + (-3)\cdot 1 \\ &= x^2 - 2x - 3 \end{aligned}$$

Koeffizienten-Probe nach Gleichungen (4) und (5):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 - 1 \;=\; 2 \;=\; -p \\ x_1 \cdot x_2 &= 3\cdot(-1) \;=\; -3 \;=\; q \end{aligned}$$

Einsetz-Proben:

$$\begin{aligned} x_1^2 - 2x_1 - 3 &= 3^2 - 2\cdot 3 - 3 \;=\; 9-6-3 \;=\; 0 \\ x_2^2 - 2x_2 - 3 &= (-1)^2 - 2\cdot(-1) - 3 \;=\; 1+2-3 \;=\; 0 \end{aligned}$$

Beispiel 2 mit der imaginären Größe (siehe nächsten Abschnitt):
Dabei ist definiert: $i := \sqrt{-1} \;\leftrightarrow\; i^2 = -1$

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 5 &= 0 \\ x_1 &= 2 + \sqrt{4-5} \;=\; 2 + \sqrt{-1} \;=\; 2+i \\ x_2 &= 2 - \sqrt{4-5} \;=\; 2 - \sqrt{-1} \;=\; 2-i \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} (x-x_1)\cdot(x-x_2) &= (x-(2+i))(x-(2-i)) \\ &= x^2 - ((2+i)+(2-i))x + (2+i)(2-i) \\ &= x^2 - (4)x + (4-i^2) \\ &= x^2 - 4x + 5 \end{aligned}$$

Koeffizienten-Probe nach Gleichungen (4) und (5):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2+i+2-i \;=\; 4 \;=\; -p \\ x_1 \cdot x_2 &= (2+i)\cdot(2-i) \;=\; 4-i^2 \;=\; 4+1 \;=\; 5 \;=\; q \end{aligned}$$

Einsetz-Proben:

$$\begin{aligned} x_1^2 - 4x_1 + 5 &= (2+i)^2 - 4\cdot(2+i) + 5 \;=\; 4+4i+i^2-8-4i+5 \\ &= (4-8+5) + (4i-4i) - 1 \;=\; 1+0-1 \;=\; 0 \\ x_2^2 - 4x_2 + 5 &= (2-i)^2 - 4\cdot(2-i) + 5 \;=\; 4-4i+i^2-8+4i+5 \\ &= (4-8+5) + (-4i+4i) - 1 \;=\; 1+0-1 \;=\; 0 \end{aligned}$$

Bemerkungen: Geschichte der Zahlen

Bei der Lösung quadratischer Gleichungen (siehe Beispiel 2) treten oft Wurzeln aus negativen Zahlen auf, also die **imaginären** Größen mit der Einheit $i := \sqrt{-1}$.

Diese sind schwer vorstellbar, heißen ja auch "imaginär". Sie werden rein formal definiert, als die Größen, deren Quadrate negativ sind. Aber kann man sich denn $(-2) \cdot 4$ oder sogar $(-1) \cdot (-1)$ wirklich vorstellen, insbesondere, wenn man bedenkt, dass die Multiplikation aus der Abkürzung der Addition gleicher Zahlen hervorgegangen ist (negativer Faktor!)?

Zu Beginn des Rechnens vor mindestens 25000 Jahren gab es nur das Zählen, also die positiven ganzen Zahlen. Negative Zahlen waren auch bei den Griechen nicht "sinnvoll", weil dort die Mathematik im Allgemeinen mit Geometrie verbunden war. Es ergaben sich aber Probleme, z.B. bei Aufgaben wie

$$5 + x \;=\; 5 \quad \rightarrow \quad x \;=\; 5 - 5 \;=\; 0$$

Die Null wurde erst sehr spät als Zahl anerkannt, ab dem 3. (oder 7.) Jahrhundert n. Chr. zuerst bei den Indern, dann bei den Arabern, und viel später (ab 1200) erst in Europa. Die Null wurde auch dazu sehr wichtig, um große Zahlen in der Dezimalschreibweise (z.B. 1050 statt dem römischen Zeichen ML) darstellen zu können.

Noch mehr Probleme traten auf bei Aufgaben wie

$$5 + x \;=\; 2 \quad \rightarrow \quad x \;=\; 2 - 5 \;=\; -3$$

Der bis dahin bekannte Zahlenraum musste wegen der Subtraktion um die negativen Zahlen erweitert werden (in Europa etwa ab 1500).

Mit der Multiplikation ganzer Zahlen blieb man in diesem Zahlenbereich, bis sich bei der Umkehrung neue Probleme zeigten wie

$$x \cdot 5 \;=\; 8 \quad \rightarrow \quad x \;=\; 8/5$$

Jetzt musste der bekannte Zahlenraum wegen der Division noch einmal erweitert werden, und zwar um die rationalen Zahlen (Brüche aus ganzen Zahlen). Dabei muss aber bei der Division die Null im Nenner ausgeschlossen werden.

Aber mit weitergehenden Aufgaben wie

$$x \cdot x \;=\; x^2 \;=\; 2 \quad \rightarrow \quad x \;=\; \sqrt{2} \;=\; 1.41421356237309504880\ldots$$

entstanden wieder neue Zahlenarten: die **irrationalen** Zahlen (G. Cardano, im 16. Jahrhundert), die nicht als Bruch von ganzen Zahlen, also als rationale Zahlen, geschrieben werden können.

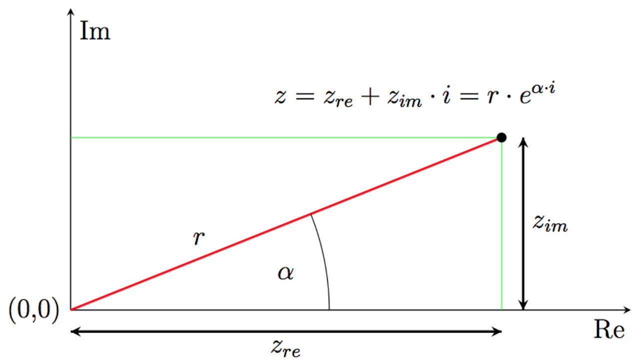
Durch das Potenzieren und deren Umkehrung (Logarithmen) und wegen den Winkelfunktionen kommen dann zu den irrationalen Zahlen im 18. Jahrhundert noch weitere Zahlenarten dazu, nämlich die transzendenten Zahlen wie z.B. e und π. Diese können nicht Lösung einer algebraischen Gleichung (also mit einem Polynom beliebigen Grades) sein. Insgesamt heißen alle diese Zahlen **reelle** Zahlen.

Aber auch dieser Zahlenraum muss nun noch einmal erweitert werden, wie das obige Beispiel 2 zeigt:

$$x^2 - 4x + 5 \;=\; 0 \qquad \rightarrow \qquad x_{1,2} \;=\; 2 \pm i \qquad \text{mit} \qquad i = \sqrt{-1}$$

Damit hat man allgemein die **komplexen** Zahlen $z = a + b \cdot i$, die eine ganz neue Dimension darstellen. Sogar im eigentlichen Sinn, denn die komplexen Zahlen können in der 2-dimensionalen Gaußschen Zahlenebene dargestellt werden - die imaginären Zahlen sind nicht Teil der reellen Achse, wie alle anderen bisherigen Zahlen, sondern bilden eine zweite, die imaginäre Achse. Die komplexen Zahlen füllen dann als Summe von einem Realteil (z_{re}) und einem Imaginärteil (z_{im}) die ganze Gaußsche Zahlenebene aus.

(6) Die komplexe Größe $z = z_{re} + z_{im} \cdot i$ bzw. $r \cdot e^{\alpha \cdot i}$ in der Gaußschen Zahlenebene:



Eine Multiplikation mit i kann in der Gaußschen Zahlenebene als Drehung um 90 Grad interpretiert werden. Mit Hilfe der komplexen Zahlen können sogar die Lösungen einer kubischen Gleichung allgemein durch Wurzelausdrücke dargestellt werden (Cardanische Formel, siehe Kapitel B mit Gleichung (13)).

Und mit diesen Zahlen als Koeffizienten kann man wieder algebraische Gleichungen (Polynome in x) beliebigen Grades schreiben und lösen.

Das wirklich Erstaunliche ist nun aber, dass dabei keine neuen Zahlentypen auftreten! Die Lösungen aller algebraischen Gleichungen beliebigen Grades, auch mit komplexen Koeffizienten, sind weiterhin "nur" komplexe Zahlen ("Fundamentalsatz der Algebra").

Und die imaginäre Größe i taucht in der wohl schönsten mathematischen Gleichung auf:

(7) $e^{i\pi} + 1 \;=\; 0 \qquad \text{oder} \qquad e^{i\pi} \;=\; -1$

Hier tauchen alle wichtigen Größen der heutigen Mathematik (0, 1, i, e und π) in einer einfachen Gleichung auf.
Die direkte Folgerung daraus kann man sich kaum noch vorstellen:

$$i^i \;=\; 0.20787957635076190854\ldots$$

Das Ergebnis von i^i ist wegen der Gleichheit mit $e^{-\frac{\pi}{2}}$ (über Wurzel aus Gleichung (7)) tatsächlich eine reelle Zahl!

Die komplexen Zahlen sind aber nicht das Ende: Z.B. benutzt man heute auch (nach William Hamilton, 1843) die hyperkomplexen Zahlen "Quaternionen", das sind vierdimensionale Größen der Form $a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$ (mit $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$). Sie erlauben eine rechnerisch elegante Beschreibung (und damit auch schnellere Berechnungen) von Drehungen im dreidimensionalen Raum (z.B. in der Computergrafik, insbesondere für Computerspiele) und haben auch in der Quantenmechanik, der speziellen Relativitätstheorie und der Theorie des Elektromagnetismus eine Bedeutung.

Ein dreidimensionales Zahlensystem (mit zwei quasi-imaginären Größen) ist nicht sinnvoll definierbar, aber man kann ein (sinnvolles) achtdimensionales Zahlensystem (mit sieben quasi-imaginären Größen), den Oktonionen, definieren, das vielleicht in der achtdimensionalen Supersymmetrie und der Stringtheorie eine Rolle spielen könnte.

B. Kubische Gleichungen

Gleichung 3. Grades

(8) $\quad ax^3 \ + \ bx^2 \ + \ cx \ + \ d \ = 0$

Gesucht sind die drei Lösungen dieser Gleichung: x_1, x_2 und x_3. Die Lösungen sind dabei um einiges aufwendiger zu finden als bei den Gleichungen 2. Grades. Gerolamo Cardano hat 1545 zum ersten Mal ein Lösungsverfahren (eigentlich von Nicolo Tartaglia und Scipione del Ferro entwickelt) beschrieben.

Man kann zuerst versuchen, die Ausgangsgleichung so umzuformen, dass der quadratische Term verschwindet ("reduzierte Form").
Dazu benutzt man die Substitution $x = z - h$ mit einer neuen Variablen z:

$$\begin{aligned} ax^3 \ + \ bx^2 \ + \ cx \ + \ d \ &= 0 \\ (z-h)^3 + \frac{b}{a}(z-h)^2 + \frac{c}{a}(z-h) + \frac{d}{a} \ &= 0 \\ (z^3 - 3z^2h + 3zh^2 - h^3) + \frac{b}{a}(z^2 - 2zh + h^2) + \frac{c}{a}(z-h) + + \frac{d}{a} \ &= 0 \\ z^3 + (-3h + \frac{b}{a})z^2 + (3h^2 - \frac{2b}{a}h + \frac{c}{a})z + (-h^3 + \frac{b}{a}h^2 - \frac{c}{a}h + \frac{d}{a}) \ &= 0 \end{aligned}$$

Man sieht, dass bei $h = \frac{b}{3a}$ der quadratische Term verschwindet, also hat man damit:

(9) $\quad z^3 \ + \ pz \ + \ q \ = \ 0 \quad$ bei $\quad h = \frac{b}{3a} \quad$ mit

(10) $\quad p \ = \ \dfrac{3ac - b^2}{3a^2}$

(11) $\quad q \ = \ \dfrac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}$

PS: Nach der gleichen Methode kann man bei einer Gleichung 2. Grades $ax^2+bx+c=0$ auch mit der Substitution $x = z - h$ schreiben:

$$\begin{aligned} ax^2 \ + \ bx \ + \ c &= 0 \\ (z-h)^2 + \frac{b}{a}(z-h) + \frac{c}{a} &= 0 \\ z^2 + (-2h + \frac{b}{a})z + (h^2 - \frac{b}{a}h + \frac{c}{a}) &= 0 \end{aligned}$$

Hier fällt mit $h = \frac{b}{2a}$ der lineare Term weg, also folgt:

$$z^2 \ + \ q \ = \ 0 \quad \text{mit} \quad q \ = \ \frac{4ac - b^2}{4a^2}$$

Durch Ziehen der Wurzel kann z und somit auch x sofort (ohne der üblichen quadratischen Ergänzung - siehe Kapitel A.) dargestellt werden durch:

$$\begin{aligned} x &= z - \frac{b}{2a} \ = \ \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} - \frac{b}{2a} \\ x_1, x_2 &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

Entsprechend wird auch bei der normierten Gleichung 2. Grades $x^2 + px + q = 0$ die in Gleichung (3) beschriebenen Lösung erreicht.

Zurück zu den Gleichungen 3. Grades:
Die sogenannte Diskriminante D, definiert durch

$$(12) \quad D \ := \ \left(\frac{p}{3}\right)^3 \ + \ \left(\frac{q}{2}\right)^2$$

$$\text{also} \quad D \ = \ \frac{27a^2d^2 + 4b^3d - 18abcd + 4ac^3 - b^2c^2}{108a^4}$$

zeigt an, ob es 1 reelle und 2 komplexe Lösungen gibt (bei $D > 0$), oder ob es 3 verschiedene reelle Lösungen gibt (bei $D < 0$). Bei $D = 0$ hat die Gleichung eine 3-fach-Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, wenn $p = q = 0$ ist, aber eine reelle 1-fache und eine reelle 2-fache Lösung, wenn $q^2 \neq 0$ und $p^3 \neq 0$ ist.

Die Lösungen von Gleichung (9) findet man mit der Cardanischen Formel, wobei die Diskriminante D wieder benutzt wird und die Nebenbedingung $u \cdot v = -\frac{p}{3}$ erfüllt sein muss:

$$\begin{aligned} (13) \quad u &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \ + \ \sqrt{D}} \\ v &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \ - \ \sqrt{D}} \\ z_1 &= u \ + \ v \\ z_2 &= e_1 u \ + \ e_2 v \\ z_3 &= e_2 u \ + \ e_1 v \end{aligned}$$

mit

$$
\begin{aligned}
e_1 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\
e_2 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}
$$

Interessant ist hierbei, dass in den Formeln komplexe Zahlen auftreten, auch wenn alle Lösungen reell sind (insbesondere bei $D < 0$). Die Lösungen der ursprünglichen Gleichung (8) erhält man dann durch Einsetzen der z-Werte in $x = z - \frac{b}{3a}$.

Eine Alternative ist, im Fall $D > 0$ nur die reelle Lösung $z_1 = u + v$ zu benutzen, und die anderen beiden Lösungen nach der Polynom-Division der Ausgangsgleichung durch $(z - z_1)$ in eine Gleichung 2. Grades umzuwandeln und diese nach den bekannten Methoden zu lösen.

Erstaunlich ist, dass schon im 16. Jahrhundert ein solch kompliziertes Verfahren gefunden werden konnte. Zusätzlich wurde von Cardano auch ein (noch komplizierteres) Verfahren für Gleichungen 4. Grades entwickelt. Für algebraische Gleichungen höheren Grades gibt es prinzipiell keine solchen Lösungsformeln.

Im heutigen Computer-Zeitalter sind diese Formeln aber nicht mehr unbedingt wichtig, da es einfacher ist, ein Programm zu entwickeln, dass die Lösungen einer Gleichung beliebigen Grades durch Approximation (z.B. Newton-Verfahren) berechnet.

Beispiel von Cardano mit einer reellen Lösung: Ausgangsgleichung:

$$x^3 + 3x^2 + 9x - 13 = 0$$

Die Berechnungen nach den obigen Gleichungen (9) bis (12) ergeben dann:

$$
\begin{aligned}
x &= z - h \quad \text{mit} \quad h = \frac{b}{3a} = 1 \\
p &= 6 \\
q &= -20 \\
&\text{also} \quad z^3 + 6z - 20 = 0 \ \text{ und} \\
D &= 108
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich für die erste Lösung:

$$
\begin{aligned}
u &= \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3} \\
v &= 1 - \sqrt{3} \\
z_1 &= u + v = 2 \\
x_1 &= z - h = 1
\end{aligned}
$$

Dabei ist $u \cdot v = (1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) = 1 - 3 = -2 = -\frac{p}{3}$ erfüllt.
Weiter folgt mit den oben definierten e_1 und e_2 für die anderen beiden Lösungen:

$$
\begin{aligned}
z_2 &= e_1 u + e_2 v = -1 + 3i \\
x_2 &= z - h = -2 + 3i \\
z_3 &= e_2 u + e_1 v = -1 - 3i \\
x_3 &= z - h = -2 - 3i
\end{aligned}
$$

Diese beiden Lösungen kann man aber auch durch Polynom-Division und Benutzen der p-q-Formel nach Gleichung (3) direkt ermitteln:

$$\begin{array}{llll}
(x^3 & +3x^2 & +9x & -13) \quad : (x-1) = x^2+4x+13 \qquad \rightarrow \qquad x_{2,3} \; = \; -2 \pm 3i \\
x^3 & -\,x^2 & & \\
\hline
 & 4x^2 & +9x & \\
 & 4x^2 & -4x & \\
\hline
 & & 13x & -13 \\
 & & 13x & -13 \\
\hline
\end{array}$$

Zur Herleitung der 3. Wurzel aus $10+\sqrt{108}$ siehe auch das nachfolgende Kapitel.

C. n-te Wurzeln

3. Wurzel aus reellen und komplexen Zahlen

Gesucht ist die 3. Wurzel aus der (komplexen) Zahl $z = z_{re} + z_{im} \cdot i$. Dabei benutzt man die wichtige Eulersche Formel:

$$(14) \quad e^{\alpha \cdot i} \; = \; \cos(\alpha) \; + \; \sin(\alpha) \cdot i$$

Man berechnet zuerst zwei Größen: Die Länge der Zahl in der Gaußschen Zahlenebene r und den Winkel α (im Bogenmaß), den die Zahl mit der positiven reellen Achse bildet - das sind die Polarkoordinaten der Zahl mit $z = r \cdot e^{\alpha \cdot i}$. Vergleiche dazu auch die Skizze auf Seite 5 bei (6).

$$(15) \qquad r \; = \; \sqrt{z_{re}^2 + z_{im}^2}$$

$$(16) \quad \tan(\alpha) \; = \; \frac{z_{im}}{z_{re}} \qquad \text{mit } z_{re} \neq 0$$

Aus $\tan(\alpha)$ muss dann mit der Umkehrfunktion arctan der Winkel berechnet werden:

$$\begin{array}{lll}
\alpha \; = \; \arctan\left(\frac{z_{im}}{z_{re}}\right) & \text{wenn } z_{re} > 0 & \text{(I. und IV. Quadrant)} \\
\alpha \; = \; \arctan\left(\frac{z_{im}}{z_{re}}\right) + \pi & \text{wenn } z_{re} < 0, z_{im} > 0 & \text{(II. Quadrant)} \\
\alpha \; = \; \arctan\left(\frac{z_{im}}{z_{re}}\right) - \pi & \text{wenn } z_{re} < 0, z_{im} < 0 & \text{(III. Quadrant)}
\end{array}$$

bzw. einfacher mit

$$\alpha \; = \; \arctan2(z_{im}, z_{re})$$

Dabei sollte die arctan-Funktion mit 2 Parametern benutzt werden, weil der Winkel in allen 4 Quadranten ($-\pi$ bis π) auftreten kann und arctan2 das richtig berücksichtigt.

Aus $z = r \cdot e^{\alpha \cdot i}$ und aus den Gleichungen (14) und (20) folgt dann durch Wurzelziehen für die 3 möglichen Wurzeln (wegen der Periodizität von sin und cos) für $k = 0, 1$ und 2:

$$(17) \quad \sqrt[3]{z} \; = \sqrt[3]{r} \cdot \left[\; \cos\left(\frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{3}\right) \; + \; \sin\left(\frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{3}\right) \cdot i \; \right]$$

Die Wurzel für $k = 0$ heißt Hauptwert der Wurzel (w_0).

Beispiel mit einer reellen Zahl $z = -8$, also $\alpha = \pi$:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{-8} &= 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi + k \cdot 2\pi}{3}\right) \;+\; \sin\left(\frac{\pi + k \cdot 2\pi}{3}\right) \cdot i \right] \\
w_0 &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot i\right) \;=\; 1 + \sqrt{3} \cdot i \\
w_1 &= \;-2 \\
w_2 &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot i\right) \;=\; 1 - \sqrt{3} \cdot i
\end{aligned}$$

Interessanterweise ist (in der komplexen Ebene) der Hauptwert $1+\sqrt{3}\cdot i$ und nicht -2.

n-te Wurzel aus reellen und komplexen Zahlen

Gesucht ist die n-te Wurzel aus der (komplexen) Zahl $z = z_{re} + z_{im} \cdot i$.

Wie in der Gleichung (17) für die 3. Wurzel gilt für die n möglichen n-ten Wurzeln für $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$:

$$(18) \quad \sqrt[n]{z} \;=\; \sqrt[n]{r} \cdot \left[\cos\left(\frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n}\right) \;+\; \sin\left(\frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n}\right) \cdot i \right]$$

Eine analoge Formel erhält man auch für das Potenzieren einer komplexen Zahl:

$$(19) \quad z^n \;=\; r^n \cdot (\cos(\alpha) \;+\; \sin(\alpha) \cdot i)^n \;=\; r^n \cdot (\cos(n\alpha) \;+\; \sin(n\alpha) \cdot i)$$

In all diesen Fällen benutzt man die Formel von de Moivre (20) - Beispiel mit $n = 2$:

$$\begin{aligned}
&(\cos(\alpha) \;+\; \sin(\alpha) \cdot i)^2 \;=\; \cos^2(\alpha) + 2\cos(\alpha)\sin(\alpha) \cdot i + \sin^2(\alpha) \cdot i^2 \\
&\quad= \;(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) \;+\; 2\cos(\alpha)\sin(\alpha) \cdot i \;=\; \cos(2\alpha) \;+\; \sin(2\alpha) \cdot i
\end{aligned}$$

Das lässt sich dann auf den allgemeinen Fall mit Exponent n durch Induktion verallgemeinern: Der Induktionsanfang mit $n = 1$ ist trivial. Sei also die Behauptung für alle Zahlen bis n richtig. Dann folgt für $n+1$ (Induktionsschritt) aus der Induktionsbehauptung und den Produktregeln für sin und cos:

$$\begin{aligned}
(20) \quad &(\cos(\alpha) \;+\; \sin(\alpha) \cdot i)^{n+1} \;=\; (\cos(n\alpha) + \sin(n\alpha) \cdot i) \cdot (\cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot i) \\
&= \;[\cos(n\alpha)\cos(\alpha) - \sin(n\alpha)\sin(\alpha)] + [\sin(n\alpha)\cos(\alpha) + \cos(n\alpha)\sin(\alpha)] \cdot i \\
&= \;\frac{1}{2}[\cos((n-1)\alpha) + \cos((n+1)\alpha) - \cos((n-1)\alpha) + \cos((n+1)\alpha)] \;+ \\
&\quad\;\frac{1}{2}[\sin((n-1)\alpha) + \sin((n+1)\alpha) + \sin(-(n-1)\alpha) + \sin((n+1)\alpha)] \cdot i \\
&= \;\cos((n+1)\alpha) \;+\; \sin((n+1)\alpha) \cdot i
\end{aligned}$$

P.S.: Aus Gleichung (14) folgt für $\alpha = \pi$ die oben erwähnte "schönste" Gleichung:

$$e^{i\pi} \;=\; (\cos(\pi) \;+\; \sin(\pi) \cdot i) \;=\; -1$$

MacTeX 2020/pdflatex → https://www.sarahandrobin.com/ingo/algebraische-gleichungen.pdf,
https://www.sarahandrobin.com/ingo/index.html